Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 785 ($WT = 1{,}70$) i 786 ($WT = 1{,}22$) z numeru 9/2019

Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,48
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Janusz Fiett	Warszawa	35,51
Mikołaj Pater	Opole	34,42
Paweł Burdzy	Warszawa	33,52
Zbigniew Skalik	Wrocław	32,95
Jakub Węgrecki	Kraków	32,16

Zadania z matematyki nr 790, 800

Redaguje Marcin E. KUCZMA

799. Czy da się tak uporządkować zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, by otrzymać ciąg różnowartościowy, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy albo różnią się o 2, albo jeden z nich jest dwukrotnością pozostałego?

800. Dla ustalonych liczb dodatnich a, b określamy funkcję $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{a}{x}+1\right) + \exp\left(-\frac{b}{x}+1\right)\right).$$

- Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $L = L(a,b) > 0$, dla której $f(L) = 1$, i że $\min\{a,b\} \leqslant L(a,b) \leqslant \max\{a,b\}$; zatem liczba $L(a,b)$ może być uważana za pewną średnią liczb a, b.
- Znaleźć, gdzie ta średnia wpisuje się w ciąg nierówności $H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$ między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb a, b?

Zadanie 800 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2019

Przypominamy treść zadań:

791. Funkcja $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem
$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+a) - \ln(x+b)} \qquad (\text{stałe: } a > b > 0).$$
Wykazać, że ma ona asymptotę ukośną (przy $x \to \infty$), i znaleźć równanie tej asymptoty.

792. Dane są liczby naturalne m, n, przy czym n jest liczbą nieparzystą, większą niż $2m$. Udowodnić, że liczba
$$m^n + (m+1)^n + \ldots + (n-m)^n$$
jest podzielna przez n^2.

791. Ponieważ
$$\frac{1}{f(x)} = \ln\frac{x+a}{x+b} = \ln(1+t), \qquad \text{gdzie } t = \frac{a-b}{x+b},$$
zaś zmienna pomocnicza $t = \frac{a-b}{x+b}$ dąży do 0, gdy $x \to \infty$, zatem
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{a-b-bt}\cdot\frac{1}{\ln(1+t)} = \frac{1}{a-b}.$$
Asymptotą ukośną może więc być jedynie prosta o współczynniku kierunkowym $\frac{1}{a-b}$; wystarczy zatem, by następująca różnica miała skończoną granicę (przy $x \to \infty$, czyli $t \to 0$):
$$f(x) - \frac{x}{a-b} = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{a-b}\left(\frac{a-b}{t} - b\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} + \frac{b}{a-b} =$$
$$= \frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)} + \frac{b}{a-b}.$$
Gdy $t \to 0$, pierwszy z ilorazów (w ostatnim uzyskanym wyrażeniu) dąży do granicy $1/2$ (bo $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$). Stąd wniosek, że asymptotą (przy $x \to \infty$) jest prosta o równaniu
$$y = \frac{x}{a-b} + \frac{1}{2} + \frac{b}{a-b} = \frac{2x+a+b}{2(a-b)}.$$

792. Rozważana suma ma parzystą liczbę składników. Parujemy: pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd. Dostajemy sumę par postaci
$$A_j = \left(\frac{n+j}{2}\right)^n + \left(\frac{n-j}{2}\right)^n, \qquad j = 1, 3, 5, \ldots, n-2m.$$
Wystarczy pokazać, że każda z liczb A_j dzieli się przez n^2. W rozwinięciu dwumianowym
$$2^n A_j = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n^k \left(j^{n-k} + (-j)^{n-k}\right)$$
składniki odpowiadające indeksom $k \geqslant 2$ są podzielne przez n^2; skoro zaś n jest liczbą nieparzystą, dwa składniki początkowe dają w sumie
$$\left(j^n + (-j)^n\right) + n\cdot n\cdot\left(j^{n-1} + (-j)^{n-1}\right) = n^2\cdot 2j^{n-1}.$$
Tak więc $2^n A_j$ dzieli się przez n^2. Korzystając jeszcze raz z nieparzystości n, wnosimy, że A_j dzieli się przez n^2.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.