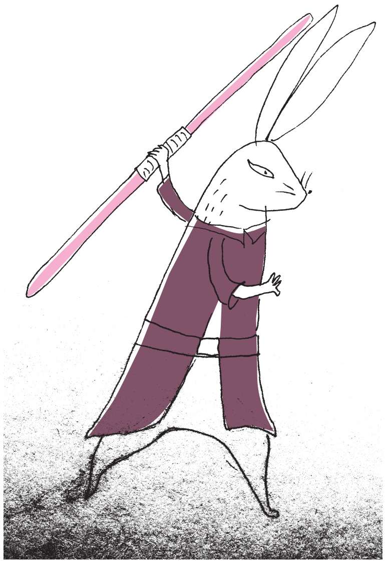


dowolnego naturalnego k liczba $3^k \cdot R$ jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy R jest podzielna przez 7, ponieważ liczby 3 oraz 7 są względnie pierwsze.

Mamy zatem 6 różnych permutacji, które można zastosować równoważnie w algorytmie. Dla przykładu, żeby sprawdzić, czy liczba 12 345 678 jest podzielna przez 7, możemy sprawdzić sumę (wybraliśmy cykl $(3, 2, 6, 4, 5, 1)$):

$$3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 125;$$

następnie $3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 25$. Ostatnia suma nie jest podzielna przez 7, zatem wyjściowa liczba też nie jest podzielna przez 7. Natomiast 12 345 683 jest podzielna przez 7, gdyż odpowiednia suma cyfr po analogicznym podstawieniu wynosi 112, a ta jest podzielna przez 7.

Zauważmy też, że permutację $(1, 3, 2, 6, 4, 5)$ możemy zapisać równoważnie jako $(1, 3, 2, -1, -3, -2)$, co istotnie może ułatwić zapamiętanie metody (de facto pamiętamy cykl tylko trzech liczb i pilnujemy zmiany znaku po każdym obrocie).

Jeśli metodę implementujemy na komputerze i chcemy naprawdę efektywnie to zrobić, jeszcze lepiej zapisać cykl jako $(1, -4, 2, -1, 4, -2)$, gdyż mnożenie przez małe potęgi 2 jest dla komputera wyjątkowo naturalne (ten i następny wariant algorytmu nie był znany autorowi tekstu wcześniej).

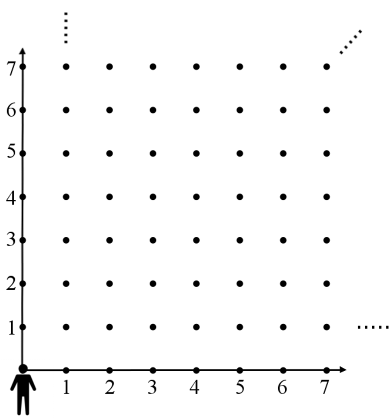
Zauważmy, że powyższa metoda może działać w stałej pamięci, jeśli liczba jest podawana na wejściu „strumieniowo” (cyfra po cyfrze) od najmniej znaczącej cyfry.

A co, gdy liczba jest podawana na wejściu od cyfry najbardziej znaczącej?

Tutaj też poradzimy sobie w stałej pamięci. Wystarczy tylko pewien cykl odwrócić (np. przyjąć $(1, -2, 4, -1, 2, -4)$) oraz postępować dalej podobnie jak w klasycznym algorytmie – łatwo sprawdzić, że wówczas obliczymy tę samą sumę, co w standardowej procedurze (choć, co ciekawe: dla pewnego – nieznanego z góry – spośród sześciu poprawnych cykli)!

Metodę z cyklem $(1, -2, 4, -1, 2, -4)$ da się wyprowadzić bezpośrednio, tym razem analizując kolejne potęgi 5 (równoważnie: (-2)), ale rosnące odwrotnie niż w klasycznym algorytmie – to znaczy od najbardziej znaczącej, a nie od najmniej znaczącej cyfry. Taka zresztą była geneza powstania oraz analizy tej metody przeprowadzona przez autora tekstu – Czytelnik Zaciekawiony może spróbować odtworzyć to rozumowanie samodzielnie.

Widoczność w nieskończonym lesie



Stoimy u progu nieskończenie milowego, nad wyraz uporządkowanego lasu. Najlepszym miejscem na uporządkowany las jest oczywiście układ współrzędnych. Pnie drzew, które są odcinkami, umieszczone są w punktach o współrzędnych całkowitych nieujemnych. Nasz wzrok z punktu $(0, 0)$, w którym drzewa nie ma, przygląda się temu zjawisku (patrz rysunek). Taki las ciągnie się nieskończenie daleko...

Kiedy patrzymy na drzewo $(1, 1)$, to zasłania ono wszystkie inne drzewa o współrzędnych (k, k) (dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$). Podobnie drzewo $(1, 2)$ zasłania wszystkie drzewa o współrzędnych $(k, 2k)$, a drzewo $(7, 5)$ wszystkie drzewa o współrzędnych $(7k, 5k)$.

Czy możliwe jest, aby z punktu $(0, 0)$ spojrzeć na wskroś tego lasu, tak aby nie zobaczyć absolutnie żadnego drzewa?

Zauważmy, że spoglądając na drzewo (k, l), patrzymy wzdłuż prostej $y = \frac{l}{k}x$. Oznacza to, że spoglądając na dowolne drzewo, będziemy zawsze patrzeć wzdłuż prostej, której współczynnik kierunkowy jest liczbą wymierną. Aby nie mieć na linii wzroku żadnego drzewa, wystarczy spojrzeć w stronę punktu, którego dokładnie jedna współrzędna jest liczbą niewymierną.

Losujemy liczbę a z przedziału $[0, \infty)$. Jaka jest szansa, że patrząc wzdłuż prostej $y = ax$, zobaczymy drzewo?

Pytanie sprowadza się do zbadania, jaką część liczb rzeczywistych z przedziału $[0, \infty)$ stanowią liczby wymierne. Co z kolei prowadzi do stwierdzenia, że szansa na zobaczenie drzewa wynosi 0. Czytelnikom Niedowierzającym i tym, którzy dopiero rozpoczynają znajomość z przeliczalnością zbiorów, polecamy artykuł Joanny Jaszuńskiej w Δ^7_{13}.

Czytelnik Purysta zapewne dostrzeże, że określenie „losujemy liczbę a z przedziału $[0, \infty)$” nie jest precyzyjne, gdyż nie podajemy rozkładu, z jakim to losowanie przebiega. Jednakże w tym miejscu nie prowadzi to do niejednoznaczności, ponieważ dla każdego rozkładu ciągłego zadanego na przedziale miara każdego jego podzbioru przeliczalnego i tak zawsze wynosi 0.

K.Ł.