Gauss, czyli tam i z powrotem

Bartłomiej BZDĘGA

Według legendy pod koniec XVIII wieku działa się następująca rzecz. Pewien nauczyciel kazał swoim uczniom dodać wszystkie liczby od 1 do 40, aby mieć przez dłuższą chwilę spokój. Wszyscy, z wyjątkiem jednego, wykonywali pracowicie kolejne dodawania i zazwyczaj popełniali błędy. Tym wyjątkowym uczniem był Carl Friedrich Gauss, który rozumował następująco:

1	2	3	$\cdots$	39	40
40	39	38	$\cdots$	2	1

$$2(1+2+\ldots+40) = 40\cdot 41$$

(lewą stronę równości otrzymujemy, sumując liczby w wierszach, a prawą – w kolumnach), więc $1+2+\ldots+40 = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 41 = 820$. Podobne rozumowanie stosujemy w zadaniach 1–3. Idea jest taka, żeby parować składniki lub czynniki: najmniejszy z największym, drugi najmniejszy z drugim największym itd.

Powyższy trik można nieco uogólnić – przecież tabela może mieć więcej niż dwa wiersze, a parowanie najmniejszych z największymi też nie jest koniecznością. Dla przykładu rozważmy ciąg liczbowy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i niech $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

(1) $$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \ldots + na_1,$$

co można wykazać za pomocą poniższej tabelki, po lewej stronie. Ta tożsamość rozwiązuje zadania 4 i 5.

a_1			
a_1	a_2		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
a_1	a_2	$\ldots$	a_n

3								•			
2				•				•			
1		•		•		•		•		•	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Podobne rozumowanie możemy stosować, zliczając wierszami i kolumnami pary liczb naturalnych spełniające określone warunki, gdyż każda taka para ma swoje miejsce w odpowiedniej tabeli.

Przykładowo policzmy wierszami i kolumnami pary (a, b), dla których $p^b \mid a$, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą, zaś $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (w tabeli wyżej, po prawej: $n = 11$ i $p = 2$). Pozostawimy Czytelnikowi zauważenie, że doprowadza to nas do *twierdzenia Legendre'a*: liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby $n!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem $\lfloor n/p\rfloor + \lfloor n/p^2\rfloor + \lfloor n/p^3\rfloor + \ldots$

Takie podejście jest skuteczne w zadaniach 6 i 7.

Zadania

1. Znając wzory $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ i $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, wyprowadzić wzór na $1^3+2^3+\ldots+n^3$.
2. Udowodnić, że dla liczb całkowitych $b > a > 0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{b} > 2\cdot\frac{b-a}{b+a}$.
3. Dowieść, że $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$ dla naturalnych $n \geqslant 3$.
4. Wykazać, że dla naturalnych n zachodzą następujące równości:
   (a) $n\cdot 2^0 + (n-1)\cdot 2^1 + (n-2)\cdot 2^2 + \ldots + 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} - n - 2$,
   (b) $1\cdot n + 3\cdot(n-1) + 5\cdot(n-2) + \ldots + (2n-1)\cdot 1 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
5. Niech $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$ dla całkowitych dodatnich k. Udowodnić, że $H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1} = n(H_n - 1)$ dla naturalnych $n \geqslant 2$.
6. Niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników liczby naturalnej k, zaś H_n – jak w poprzednim zadaniu. Dowieść, że $H_n - 1 < \frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)}{n} \leqslant H_n$.
7. Wykazać, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 2$ zachodzi równość $\lfloor\sqrt[2]{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \ldots + \lfloor\log_n n\rfloor$.
8. Niech $d(k)$ będzie jak w zadaniu 6. Ustalmy liczbę rzeczywistą $x > 1$. Dowieść, że dla wszystkich naturalnych $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $\frac{d(1)}{x^1} + \frac{d(2)}{x^2} + \ldots + \frac{d(n)}{x^n} < \frac{1}{x^1-1} + \frac{1}{x^2-1} + \ldots + \frac{1}{x^n-1}$.
9. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają równości $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2a_1$. Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1a_2\ldots a_n$, to $(a_1a_2\ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m$.

Wskazówki do zadań

1. Zauważyć, że $(1+k)^3 + (n-k)^3 = 3(n+1)k^2 - 3(n^2-1)k + n^3 - 1$.
2. Udowodnić nierówność $\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b-k} \geqslant \frac{4}{a+b}$.
3. Zauważyć, że $(1+k)(n-k) \geqslant n$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ponadto dla $k \neq 0, n-1$ nierówność jest ostra.
4. (a) Skorzystać z tożsamości (1) dla ciągu $a_k = 2^{k-1}$.
(b) Jak wyżej, dla $a_k = 2k - 1$. Przyda się też równość $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$.
5. Skorzystać z tożsamości (1) dla $a_k = \frac{1}{k}$, gdzie $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
6. Rozważyć takie pary (a, b), dla których $b \mid a$, gdzie $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Po sporządzeniu tabeli w kolumnach mamy kolejno $d(1), d(2), \ldots, d(n)$ par, a w wierszach $\lfloor n/1\rfloor, \lfloor n/2\rfloor, \ldots, \lfloor n/n\rfloor$ par. Trzeba jeszcze zastosować nierówność $x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$.
7. W tabeli dla $a, b \in \{2, 3, \ldots, n\}$ zaznaczamy takie pola (a, b), dla których $a^b \leqslant n$. Wówczas w a-tej kolumnie mamy $\lfloor\log_a n\rfloor - 1$ zaznaczonych pól, zaś w b-tym wierszu jest ich $\lfloor\sqrt[b]{n}\rfloor - 1$.
8. Ponieważ $x > 1$, mamy $\frac{1}{x^k-1} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{2k}} + \ldots$ Dla $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ w polu (a, b) tabeli umieszczamy liczbę $\frac{1}{x^a}$, jeśli $b \mid a$, w przeciwnym razie umieszczamy 0. Sumując kolumnami, otrzymamy lewą stronę dowodzonej nierówności, natomiast wierszami – liczbę mniejszą od prawej strony.
9. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_m$ będą różnymi dzielnikami pierwszymi iloczynu $a_1a_2\ldots a_n$ oraz niech $w_{i,j}$ oznacza wykładnik liczby p_j w rozkładzie a_i na czynniki pierwsze dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. W pole tabeli o współrzędnych (i, j) wpisujemy $a_i/p_j^{w_{i,j}}$. Należy zaobserwować, że w każdym wierszu są różne liczby całkowite dodatnie, więc ich iloczyn wynosi co najmniej $n!$. Ponadto iloczyny liczb w kolejnych kolumnach są równe $a_1^{m-1}, a_2^{m-1}, \ldots, a_n^{m-1}$.