Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2020

Zadania z matematyki nr 797, 798

Redaguje Marcin E. KUCZMA

797. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość h. Punkty M i N to (odpowiednio) środki boków AC i BC. Okrąg przechodzący przez punkty B i N, styczny do prostej BM, przecina prostą AB ponownie w punkcie P. Wyznaczyć największą liczbę λ, dla której (przy każdej takiej konfiguracji) odcinek AP ma długość nie mniejszą niż λh.

798. W nieograniczonym trójkątnym diagramie

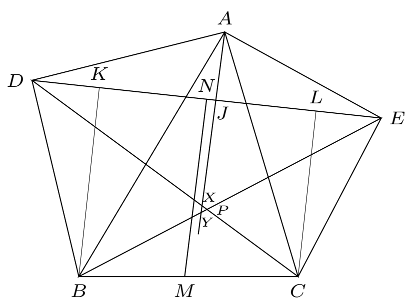
$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\;1\;1 \\ 1\;2\;3\;2\;1 \\ 1\;3\;6\;7\;6\;3\;1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

w górnym wierszu jest pojedyncza jedynka; a dalej każdy element jest sumą trzech liczb znajdujących się nad nim w poprzednim wierszu ($\searrow, \downarrow, \swarrow$). Wiersze są numerowane od zera; zatem w n-tym wierszu jest $2n+1$ liczb dodatnich.

(a) Wykazać, że w każdym wierszu, poza zerowym i pierwszym, jest jakaś liczba parzysta.

(b) Wyznaczyć numery tych wierszy, w których są dokładnie trzy liczby nieparzyste.

Zadanie 798 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit z Krakowa.



Rozwiązania zadań z numeru 11/2019

Przypominamy treść zadań:

789. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające równanie
$$f\big(f(x)+y\big) = 4yf(x) + f(x^2-y) \quad \text{dla} \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

790. Na bokach AB, AC trójkąta ostrokątnego ABC, po jego zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABD, ACE z kątami prostymi przy wierzchołkach D, E. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty M i N są środkami odcinków BC i DE. Udowodnić, że każda z prostych MN, AP jest prostopadła do prostej DE.

789. Podstawmy, kolejno, $y=-f(x)$ oraz $y=x^2$; otrzymujemy równania
$$f(0) = -4f(x)^2 + f\big(x^2+f(x)\big)$$
oraz
$$f\big(f(x)+x^2\big) = 4x^2f(x) + f(0),$$
które po dodaniu stronami i redukcji dają związek $f(x)\big(f(x)-x^2\big)=0$. Zatem dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$ ma miejsce alternatywa: $f(x)=0$ lub $f(x)=x^2$. Stąd, w szczególności, $f(0)=0$.

Jeśli $x=0$ jest jedynym miejscem zerowym funkcji f, to $f(x)=x^2$ dla wszystkich x. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia zadane równanie. Pozostaje przypadek, gdy f ma jeszcze jakieś miejsce zerowe $a\neq 0$. Wykażemy, że wówczas f jest tożsamościowo równa zeru.

Przypuśćmy, że $f(b)\neq 0$ dla pewnego b. Biorąc w zadanym równaniu $x=a$, $y=b$, dostajemy $f(b)=f(a^2-b)$; ta liczba nie jest zerem, więc z wcześniejszej alternatywy wynika, że wynosi ona jednocześnie b^2 oraz $(a^2-b)^2$. Przyrównanie tych wartości daje równość $2b=a^2$. To liczba dodatnia; stąd $f\equiv 0$ w przedziale $(-\infty,0]$. Weźmy teraz dowolną liczbę $c>0$ i w wyjściowym równaniu podstawmy $y=c$, $x=-\sqrt{c}$ (już wiemy, że $f(-\sqrt{c})=0$). Wychodzi $f(c)=0$. Tak więc $f\equiv 0$ także w przedziale $(0,\infty)$.

Wniosek (odpowiedź): jedynymi funkcjami spełniającymi podane równanie są: $f(x)=0$ (dla wszystkich x) oraz $f(x)=x^2$ (dla wszystkich x).

790. Niech punkty J,K,L będą rzutami prostokątnymi punktów A,B,C na prostą DE. Trójkąt prostokątny AJD jest przystający do trójkąta DKB; analogicznie, trójkąt AJE przystaje do ELC. Zatem $|JD|=|KB|$, $|JE|=|LC|$, $|AJ|=|DK|=|EL|$. Z ostatniej równości wynika, że środek N odcinka DE jest też środkiem odcinka KL, i wobec tego $MN\perp DE$.

Prosta AJ przecina odcinki CD i BE w punktach, które nazwiemy odpowiednio X i Y. Z proporcji
$$\frac{|JX|}{|DJ|}=\frac{|LC|}{|DL|}=\frac{|JE|}{|DL|} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{|JY|}{|EJ|}=\frac{|KB|}{|EK|}=\frac{|JD|}{|EK|}$$
wyznaczamy
$$|JX|=\frac{|JD|\cdot|JE|}{|DL|} \qquad \text{oraz} \qquad |JY|=\frac{|JD|\cdot|JE|}{|EK|}.$$
Skoro zaś $|DK|=|EL|$, zatem $|DL|=|EK|$, i w takim razie $|JX|=|JY|$. To oznacza, że $X=Y=P$, a prosta AP to prosta AJ, prostopadła (z definicji) do DE.