Lista uczestników ligi zadaniowej
Klubu 44F
po zakończeniu
roku szkolnego 2018/19
(po 681 zadaniach)

Tomasz Rudny	–	40,98
Michał Koźlik	–	4–35,04
Jacek Konieczny	–	29,80
Ryszard Woźniak	–	28,77
Krzysztof Magiera	–	3–27,75
Aleksander Surma	–	4–27,75
Paweł Perkowski	–	2–27,33
Mateusz Kapusta	–	25,37
Sławomir Buć	–	18,33
Jerzy Witkowski	–	3–16,83
Jacek Grela	–	13,91

Lista obejmuje uczestników, którzy przysyłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2016–2018 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 13 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44F w roku szkolnym 2018/19

W ubiegłym roku próbowałam zrealizować pomysł, żeby w każdej serii zadań jedno było łatwiejsze, a drugie trudniejsze. Celem było zachęcenie do udziału w tej zabawie oraz wypromowanie uczestników, którzy poradzą sobie z trudniejszymi zadaniami. Ale pomysły sobie, a życie sobie. Kilka razy zdarzyło się, że zadanie, które uznałam za łatwe, uzyskało wysoki współczynnik trudności i odwrotnie. Takim zaskoczeniem było zadanie **679** ($WT = 3{,}25$). Zderzały się w nim sprężyście, niecentralnie dwa krążki hokejowe, z których jeden początkowo spoczywał. Zakładając brak tarcia, należało znaleźć maksymalną część energii układu, która podczas zderzenia przechodzi w energię sprężystości. Prawie wszyscy uczestnicy uznali, że cała energia ruchu wzdłuż prostej przechodzącej przez środki krążków zamieni się na energię sprężystości, podczas gdy w chwili maksymalnego odkształcenia prędkości krążków w tym kierunku wyrównują się. Zaskoczyło mnie również zadanie **675** ($WT = 3{,}33$), w którym trzy jednakowe, jednakowo naładowane kulki połączono nieprzewodzącymi nićmi, tworzącymi trójkąt prostokątny. Należało znaleźć przyspieszenia kulek natychmiast po przecięciu nici na przeciwprostokątnej trójkąta. Tu zdecydowana większość uczestników uznała, że przyspieszenie kulki na przecięciu prostopadłych nici wynosi zero, tymczasem na układ kulek na przyprostokątnej działa wzdłuż nici niezrównoważona siła zewnętrzna i ich przyspieszenia w tym kierunku są jednakowe. Autorem jedynych poprawnych rozwiązań w obu przypadkach był **Jan Zambrzycki**. Niemniej jednak pomysł sprawdził się o tyle, że pojawili się nowi uczestnicy ligi, a wśród nich uczniowie.

Najwyższy współczynnik trudności ($WT = 3{,}77$) miało zadanie **673** z termodynamiki, w którym następowały skokowe zmiany ciśnienia na zewnątrz cylindra izolowanego cieplnie od otoczenia. Należało znaleźć temperaturę końcową. Procesy były nieodwracalne i nie można było stosować prawa przemiany adiabatycznej kwazistacjonarnej: $V^k = \mathrm{const}$. Podobny problem pojawiał się już we wcześniejszych zadaniach klubu i byłam bardzo ciekawa, jak to zadanie wypadnie. W pełni poprawne rozwiązanie nadesłał **Tomasz Wietecha**, pozostałe rozwiązania ocenione zostały na zero punktów.

Najwięcej (osiem) rozwiązań bez żadnej usterki nadesłali w tym roku Jan Zambrzycki i Tomasz Wietecha. Wyróżnił się również **Mateusz Kapusta**, który ma na swoim koncie pięć bezbłędnych rozwiązań, a w przypadku trzech zadań były to jedyne w pełni poprawne rozwiązania. Chodzi o zadania **663** ($WT = 3{,}13$), które było połączeniem elektrostatyki i mechaniki, oraz **668** ($WT = 3{,}06$) i **670** ($WT = 2{,}35$), oba z optyki. Niektórzy uczestnicy klubu, mają wyraźne preferencje do wybranych tematów, inne wychodzą im nieco gorzej albo omijają je szerokim łukiem.

Trzech klubowiczów przekroczyło limit 44 punktów: Tomasz Wietecha po raz 14(!), Marian Łupieżowiec i Jan Zambrzycki po raz drugi.

Na koniec prośba do uczestników klubu, którzy przysyłają skany ręcznie pisanych rozwiązań, żeby były one pisane w miarę czytelnie i na neutralnym tle.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2020

Zadania z matematyki nr 795, 796

Redaguje Marcin E. KUCZMA

795. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = x_n\sqrt{\frac{x_{n-1} + x_n}{2x_{n-1}}} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Uzasadnić zbieżność i wyznaczyć granicę tego ciągu.

796. Dane są liczby całkowite $m > n > 1$, przy czym m jest liczbą parzystą. Udowodnić, że równanie

$$x^m + y^m = (x + y)^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

Zadanie 796 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2019

Przypominamy treść zadań:

787. Niech M będzie dowolnym niepustym skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dowieść, że można ustawić elementy zbioru M w ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ tak, by dla każdej trójki wskaźników $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j < k$ spełniony był warunek: $x_i + x_k \neq 2x_j$.

788. Znaleźć największą liczbę t, dla której nierówność

$$(a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3abc \geqslant t(a + b + c)^3$$

zachodzi dla każdej trójki liczb dodatnich a, b, c, będących długościami boków trójkąta.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2018/19

Krzysztof Kamiński	–	2–42,48
Franciszek S. Sikorski	–	1–41,28
Krzysztof Maziarz	–	37,45
Michał Koźlik	–	35,73
Janusz Fiett	–	2–33,09
Mikołaj Pater	–	31,50
Paweł Burdzy	–	30,60
Zbigniew Skalik	–	3–30,03
Jakub Węgrecki	–	29,41
Marek Spychała	–	2–27,55
Bartłomiej Pawlik	–	27,51
Marcin Kasperski	–	4–27,01
Janusz Wojtal	–	25,24
Szymon Kitowski	–	23,49
Stanisław Bednarek	–	2–23,02
Piotr Lipiński	–	1–23,02
Marcin Małogrosz	–	3–22,34
Łukasz Merta	–	20,93
Błażej Żmija	–	20,68
Kacper Morawski	–	20,50
Andrzej Kurach	–	1–20,29
Jędrzej Biedrzycki	–	19,85
Michał Adamaszek	–	4–19,81
Tomasz Wietecha	–	12–19,12
Adam Woryna	–	3–15,10
Marek Prauza	–	4–14,96

Legenda (przykładowo): stan konta 4–27,01 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma 27,01 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2017, 2018 lub 2019.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (14), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (20), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (12), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (4), P. Kubit (7), J. Cisło (14), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik, A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):
„dwukrotni": Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, J. Fiett, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski.

787. Warunki zadania nie zmieniają się przy przesunięciu zbioru M o dowolną liczbę całkowitą. Można więc zakładać, że jego elementami są liczby nieujemne. Zauważmy też, że jeśli elementy pewnego zbioru M da się uporządkować w wymagany sposób, wówczas to samo uporządkowanie jest dobre dla każdego podzbioru zbioru M (po wykreśleniu zbędnych elementów).

Wystarczy zatem udowodnić tezę zadania dla zbiorów postaci $M_m = \{1, 2, 3, \ldots, 2^m\}$. Dla $M_1 = \{1, 2\}$ każde z dwóch uporządkowań jest dobre (warunek spełniony „w próżni"). Dalej indukcja: przyjmijmy, że dla pewnego m zbiór M_m daje się ustawić w ciąg $(x_1, \ldots, x_{2^m})$ tak, że $x_i + x_k \neq 2x_j$, gdy $i < j < k$. Wówczas ciąg

$$(y_1, \ldots, y_{2^{m+1}}) = (2x_1, \ldots, 2x_{2^m}, 2x_1-1, \ldots, 2x_{2^m}-1)$$

jest szukanym uporządkowaniem zbioru M_{m+1} (jednym z możliwych); bo gdy $0 < i < j < k \leqslant 2^m$ lub $2^m < i < j < k \leqslant 2^{m+1}$, nierówność $y_i + y_k \neq 2y_j$ wynika z założenia indukcyjnego; gdy zaś $i \leqslant 2^m < k$, liczba $y_i + y_k$ jest nieparzysta, więc $\neq 2y_j$. To kończy krok indukcyjny.

788. Dla trójkąta równobocznego zachodzi równość przy wartości parametru $t = 1/9$. Wykażemy, że wartość $t = 1/9$ gwarantuje spełnienie nierówności dla każdego trójkąta.

Długości boków a, b, c dowolnego trójkąta można wyrazić przez trójkę liczb $x, y, z > 0$, pisząc: $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Oznaczmy przez $F(a, b, c)$ różnicę między lewą oraz prawą stroną zadanej nierówności (z parametrem $t = 1/9$); mamy uzasadnić, że $F \geqslant 0$. Do dowodu użyjemy tożsamości

$$F(y+z, z+x, x+y) = \frac{2}{3}\, A(x, y, z) + \frac{2}{9}\, B(x, y, z), \tag{1}$$

gdzie

$$A(x, y, z) = x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y), \tag{2}$$

$$B(x, y, z) = (x+y+z)\big[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\big]. \tag{3}$$

Sprawdzenie tożsamości (1) jest czynnością mechaniczną; z uwagi na wielomianową jednorodną (stopnia 3) postać obu jej stron, wystarczy ją sprawdzić np. dla $z = 1$ oraz czterech różnych wartości y (można też użyć programu komputerowego). Wyrażenia (2) i (3) mają dla $x, y, z \geqslant 0$ wartości nieujemne: nierówność $B \geqslant 0$ jest oczywista; zaś $A \geqslant 0$ to znana *nierówność Schura*. Stąd $F \geqslant 0$. Wniosek: szukana maksymalna wartość t wynosi $1/9$.

[Dla kompletności – jednolinijkowy dowód nierówności Schura: niech np. $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$; wówczas

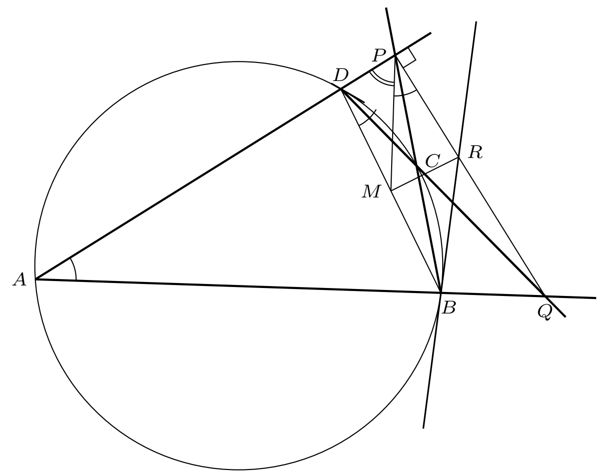
$$A(x, y, z) = (x-y)\big[x(x-z) - y(y-z)\big] + z(x-z)(y-z);$$

to wartość nieujemna, bo $x(x-z) \geqslant y(y-z)$.]

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44M w roku szkolnym 2018/19

W tegorocznym omówieniu do znudzenia powtarza się fraza „wszystkie nadesłane rozwiązania podobne do firmowego". To chyba oznacza, że zadania były trochę niefortunnie dobrane; tylko nieliczne dały możliwość rozwiązania sposobem odmiennym, a zgrabnym. Te, w których uczestnicy jednak zdołali znaleźć ciekawe rozwiązanie lub uogólnienie – bądź też opatrzyli interesującym komentarzem – włączamy do omówienia; a spośród pozostałych – zadania z wysokim współczynnikiem trudności (WT) lub niską liczbą przysłanych rozwiązań (LPR).

Tu mała uwaga: formuła definiująca WT ma faktyczne znaczenie w obrębie jednej serii, bowiem zależy od N, liczby uczestników owej serii. W serii 765, 766 wartość WT obu zadań wydaje się nie dość wysoka; to skutek niewielkiej wartości N, bowiem redaktor Ligi wyraźnie nie docenił geometrycznego zadania 765 i oczekiwał znacznie wyższej frekwencji w owym miesiącu…



Zadanie **765.** [Czworokąt $ABCD$ cykliczny ($\measuredangle A =$ min. kąt wewn.); $P = AD \cap BC$, $Q = AB \cap DC$, $AP \perp PQ$; $M =$ środek $BD \Rightarrow PM \perp AB$] ($WT$=1,78; LPR=4).

Tylko cztery dobre rozwiązania: **M. Adamaszek**, **J. Węgrecki**, **J. Cisło** – zupełnie elementarnie (choć nie prościej niż w rozwiązaniu firmowym). **Janusz Olszewski** – inaczej i bardzo krótko: styczne do okręgu $(ABCD)$ w punktach B, D przecinają się w punkcie R na prostej PQ (tw. Pascala dla sześciokąta $ABBCDD$); $MR \perp MD$, $PR \perp PD$, więc czworokąt $MDPR$ jest cykliczny; stąd $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle BDR| = |\measuredangle MPR| = 90^\circ - |\measuredangle MPA|$ i $PM \perp AB$.

„Jednokrotni” członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie): R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Kurach, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Zadanie **766.** [Znaleźć $M > 5/2$: $\forall a,b,c,d,e > 0$: $\sum_{\text{cykl}} \left(\frac{a}{b+c}\right)^{1/5} \geqslant M$; większe M – wyższa ocena] (WT=2,44; LPR=3). Proponując to zadanie, **Piotr Kumor** nie znał optymalnej wartości stałej M (czyli kresu dolnego rozważanej sumy cyklicznej). Potrafił pokazać, że liczba $M = 3 \cdot 2^{-1/5}$ jest ograniczeniem dolnym (większym od banalnego 5/2). To ograniczenie, wraz z uzasadnieniem Autora zostało podane jako rozwiązanie firmowe; zostało też znalezione przez dwóch rozwiązujących (**M. Adamaszek**, **J. Olszewski**). Jednak końcowa klauzula zadania nie pozwoliła przyznać im oceny maksymalnej, bowiem do boju ponownie ruszył Autor zadania – i udowodnił, że $M = 3$ jest szukanym kresem dolnym (!). Dowód jest o wiele za długi, by go tu zamieścić, nawet skrótowo. Wzmiankę o tym wyniku, osadzoną w szerszym kontekście, znajdzie Czytelnik w artykule Autora w niniejszym numerze *Delty* (s. 14–15); a w elektronicznej wersji numeru – pełny dowód.

Zadanie **767.** [Kwadrat $n \times n$; linie podziału – siatka $2n(n+1)$ odcinków jednostkowych; należy je pokolorować (4 kolory); każdy mały kwadracik ma mieć brzeg 4-barwny; duży kwadrat ma mieć brzeg 4-barwny, ale każdy bok 1-barwny; dla jakich n da się to wykonać?] (WT=1,47; LPR=15). Da się dla każdego n; odmienny (nietrudny) dowód dla n parzystych i nieparzystych. **Janusz Fiett** wyliczył, że (przy ustalonych kolorach boków dużego kwadratu) liczba możliwych pokolorowań siatki dla $n = 30$ wynosi 33 554 944; wierzymy na słowo.

Janusz Olszewski zauważył, że modyfikacja rozumowania firmowego daje dla planszy prostokątnej $m \times n$ odpowiedź pozytywną, gdy m, n są jednakowej parzystości, oraz uzasadnił odpowiedź negatywną w pozostałym przypadku. To ładne uzupełnienie zadania: przypuśćmy, że udało się pomalować w opisany sposób prostokąt $ABCD$ o bokach AB, CD długości nieparzystej oraz BC, AD długości parzystej, przy czym bok AB jest czerwony; skracając boki BC, AD o jednostkę dostajemy prostokąt $A'B'CD$ (o polu nieparzystym), którego żaden bok nie zawiera odcinka czerwonego. Zatem wszystkie czerwone odcinki rozważanej siatki (poza tymi na boku AB) leżą wewnątrz tego ostatniego prostokąta; każdy z nich skleja dwa kwadraciki jednostkowe; dostajemy parkietaż prostokąta $A'B'CD$ kostkami domino – sprzeczność.

Zadanie **768.** [Równanie $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = (1+x)^m$ w $(k,m,x) \in \mathbb{N}^3$] (WT=2,85; LPR=5 (7?)). Dwaj najczęściej cytowani uczestnicy Ligi zaimponowali erudycją: **Janusz Olszewski** zwrócił uwagę na ogólne twierdzenie:

Dla liczb naturalnych $a > b$, względnie pierwszych, oraz dla $n \geqslant 7$ istnieje liczba pierwsza p, która dzieli różnicę $a^n - b^n$, ale nie $a^i - b^i$ dla $i = 1, \ldots, n-1$; gdy $2 \leqslant n \leqslant 6$ też tak jest, z wyjątkiem przypadków: $[n = 6,\ a = 2,\ b = 1]$ *oraz* $[n = 2,\ a + b = 2^m\ \ (m \in \mathbb{N})]$.

Jest ono najlepiej znane pod nazwą: twierdzenie Zsigmondy'ego; w nieznacznie różniących się wersjach jest również wiązane z nazwiskami: Bang, Birkhoff, Vandiver; por. artykuł A. Rotkiewicza w *Pracach Mat.* IV (1960), s. 21–28.

Dane w zadaniu równanie można (dla $x > 1$) przepisać równoważnie:

(1) $$x^{k+1} - 1 = (x-1)(x+1)^m.$$

Gdy $k, x \geqslant 2$, wówczas biorąc w tw. Zsigmondy'ego $a = x$, $b = 1$, $n = k+1$, dostajemy – poza wymienionymi przypadkami [...] – liczbę pierwszą p dzielącą $x^{k+1} - 1$, ale nie $x - 1$, $x^2 - 1$, co daje sprzeczność z równaniem (1); zaś przypadki [...], jak również $k = 1$ lub $x = 1$, łatwo już zbadać bezpośrednio, uzyskując ogólne rozwiązanie równania: $(k,m,x) = (1,1,x)$ lub $(2^m - 1, m, 1)$. (**J. Olszewski** dostarczył jeszcze dwa inne rozwiązania, dłuższe).

Piotr Kumor podzielił się wiedzą na temat równania Nagella–Ljunggrena

(2) $x^n - 1 = (x-1)y^q; \quad x, y, n, q \in \mathbb{N};\ x, y, q > 1;\ n > 2;$

oczywiście (1) jest szczególnym przypadkiem (2). Choć ogólne rozwiązanie (2) nie jest znane, do celów naszego zadania wystarczy twierdzenie mówiące, że (2) nie ma rozwiązań z $y \equiv 1 \pmod{x}$ (Bugeaud, Mignotte, Roy): `pdfs.semanticscholar.org/e645/956801dd058624d9a8ed1c279c62199e53bb.pdf`

Nie ma tu miejsca, by zreferować wszystkie ciekawe przysłane informacje o tym równaniu (Google: `Nagell-Ljunggren equation`; można też zajrzeć do omówienia ligi w elektronicznej wersji numeru).

Jak zaś zrobić to zadanie bez głębokiej wiedzy (lub sprawnej przeglądarki), pokazuje rozwiązanie firmowe oraz podobne elementarne rozwiązania, które przysłali: **M. Adamaszek**, **M. Małogrosz**, **T. Wietecha**; jeszcze dwaj uczestnicy zrobili istotną część zadania, jednak w konkluzji gubiąc serię przypadków.

Zadanie **770.** [Dane $m, n \in \mathbb{N}$; $m, n \geqslant 2$; $K_n(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{m} n^{-a_i}$; $S = \{K_n(a_1, \ldots, a_m) < 1\colon\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}\}$; $\sup S = ?$] (WT=2,71; LPR=6 (9?)). Rozwiązania nie odbiegały od firmowego: **M. Adamaszek**, **M. Kasperski**, **J. Fiett**, **J. Olszewski**, **A. Kurach**, **Z. Skalik**; a także (poprawnie po dopracowaniu): **J. Cisło**, **S. Słobodianiuk**, **P. Najman**. Autor zadania, **Adam Woryna**, wspomniał, że rozważana wielkość $K_n(a_1, \ldots, a_m)$ jest nazywana *sumą Krafta* ciągu $(a_1, \ldots, a_m)$.

Zadanie **771.** [$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalna; $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a - b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $f = ?$] (WT=2,91; LPR=6). Nie wszyscy rozwiązujący zauważyli, że podane równanie jest zakładane *jedynie* dla par liczb o różnicy całkowitej (przyjęcie tego założenia dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ to istotna zmiana zadania!). Dobre rozwiązania: **M. Adamaszek**, **W. Bednarek**, **J. Cisło**, **P. Kumor**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**; we wszystkich wystarczało rozważanie par a, b różniących się o 2, 4 lub 8; teza: f jest wielomianem stopnia $\leqslant 2$. Intrygujące pytanie postawił **P. Kumor**: czy dla uzyskania tezy nie wystarczy założenie podanej równości dla pewnych ustalonych *dwóch* (a nie trzech) wartości różnicy $|a-b|$? Pytanie przekazujemy Czytelnikom. (Ustalenie *jednej* nie wystarczy; przykłady: `math.stackexchange.com/questions/116236/mean-value-property-with-fixed-radius`).

Zadanie **776.** [Sześcian o krawędzi k przecięty płaszczyzną w odległości d od jego środka, nierozłączną z żadną ścianą; $\max d = ?$] (WT=2,88; LPR=7). Rozwiązania jak firmowe: nieistotne różnice w warsztacie (rozmiary prac: od 1/2 do 4 stron wydruku): **M. Adamaszek**, **J. Fiett**, **A. Kurach**, **M. Małogrosz**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **B. Żmija**.

Zadanie **777.** [$\triangle ABC$; $K \in BC$, $L \in CA$, $M \in AB$ – punkty styczności z okręgiem wpisanym; P na prostej KM; $PC \| KL \Rightarrow$ prosta AP przepoławia KL] (WT=2,45; LPR=10). Twierdzenie Menelausa, użyte w rozwiązaniu firmowym, można było zastosować i do innych trójkątów widocznych na rysunkach (**Michał Adamaszek**: $\triangle ABC$; **Andrzej Kurach**: $\triangle KLY$; $Y = AC \cap KM$); dawało tezę prawie natychmiast. Używając metod bardziej wymyślnych (wzajemność biegunowych, dwustosunek, symediany), zadanie zrobili **Janusz Olszewski**, **Semen Słobodianiuk**; nie przedstawiamy tych prac, zważywszy większą prostotę (i mniejszą długość) rozwiązania firmowego oraz pokrewnych. Pozostałe dobre rozwiązania – rachunkowe.

Zadanie **779.** [Plansza $n \times n$; w każdym polu liczba całkowita; liczby w polach sąsiednich różnią się $\leqslant 1$; badamy $m \in \mathbb{N}$ takie, że przy każdym takim wypełnieniu pewna liczba pojawi się na $\geqslant m$ polach; $\max m = ?$] (WT=2,71; LPR=7). Rozwiązania jak firmowe (lub dość podobne): **M. Adamaszek**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **B. Żmija**, **R. Kujawa**, **K. Matuszewski**; oraz (rozpatrując liczne przypadki) **A. Kurach**. Tylko **Michał Adamaszek** zwrócił uwagę, że przy każdym takim wypełnieniu dowolnej planszy *prostokątnej* pewna liczba występuje w każdym wierszu lub każdej kolumnie; stąd dla kwadratu $n \times n$ odpowiedź: $(\max m) = n$.

Zadanie **781.** [Dane $b > a > 0$ oraz liczba parzysta n; badamy średnie $A = A(x_1, \ldots, x_n)$, $H = H(x_1, \ldots, x_n)$, gdy $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$; $\sup(A/H) = ?$] (WT=1,36; LPR=16). Prościej niż firmówka: prawie wszyscy skorzystali z wypukłości (względem każdego x_i) funkcji A/H i wywnioskowali, że na kostce $[a, b]^n$ osiąga ona maksimum w jednym z wierzchołków – mianowicie tym, gdzie jest jednakowo wiele wystąpień a i b; zaś dla n nieparzystego – gdzie liczby wystąpień a i b różnią się o 1; ten przypadek to naturalne uogólnienie zadania (**M. Kasperski**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**).

Zadanie **783.** [N kwadratów (boki $\|$, $\perp$ do ustalonego kierunku); S – zbiór ich środków $\Rightarrow$ można wyróżnić pewne kwadraty tak, by każdy punkt zbioru S leżał w $\geqslant 1$ oraz $\leqslant 4$ wyróżnionych kwadratach] (WT=3,76; LPR=2). Oba dobre rozwiązania jak firmowe: **Karol Matuszewski**, **Janusz Olszewski**.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.