Klub 44 M

$\otimes\sqrt{\sum !}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2019

Zadania z matematyki nr 785, 786

Redaguje Marcin E. KUCZMA

785. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o środku O; przy tym $|BC| = |CD|$. Przekątne AD i CE są prostopadłe, zaś przekątne AD i BE przecinają się w takim punkcie P, że $|AP| = |AO|$. Wykazać, że trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych (a, b, c, d) o tej własności, że każdy z iloczynów ab, bc, ac, bd, cd jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 786 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2019

Przypominamy treść zadań:

781. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 0$ oraz parzystej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć kres górny wartości stosunku A/H, gdzie A i H to (odpowiednio) średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna n liczb, wybranych dowolnie z przedziału $[a, b]$.

782. Dany jest trójkąt ABC, w którym wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość h. Na każdym odcinku CT, łączącym wierzchołek C z bokiem AB, odkładamy odcinek TP ustalonej długości $d < h$. Uzyskane w ten sposób punkty P tworzą pewną krzywą. Czy – jeśli liczba d jest dostatecznie mała – długość owej krzywej przekroczy długość boku AB?

781. Rozważamy średnie A i H liczb $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Weźmy dowolną liczbę $c > 0$ i zauważmy, że

$$(1)\qquad \frac{A}{H} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{c}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{x_i}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i}\right)\right)^2$$

– skorzystaliśmy z nierówności $4\alpha\beta \leqslant (\alpha + \beta)^2$ dla liczb $\alpha = \sum x_i/c$, $\beta = \sum c/x_i$.

Dla $x \in [a, b]$ mamy nierówność $(x - a)(x - b) \leqslant 0$, którą przepisujemy w postaci

$$x + \frac{ab}{x} \leqslant a + b$$

i dalej, dzieląc przez $\sqrt{ab}$:

$$(2)\qquad \frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{x} \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

Kontynuujemy szacowanie (1), przyjmując $c = \sqrt{ab}$ i korzystając z (2):

$$\frac{A}{H} \leqslant \frac{1}{4n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{x_i}\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{4n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4ab}\,.$$

Liczba n jest z założenia parzysta. Gdy $x_i = a$ dla połowy spośród wskaźników $i = 1, \ldots, n$, zaś $x_i = b$ dla pozostałej połowy, wówczas we wszystkich szacowaniach zachodzi równość. Zatem liczba $(a+b)^2/4ab$ jest maksymalną wartością stosunku A/H.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 775 ($WT = 1{,}41$) i 776 ($WT = 2{,}88$) z numeru 2/2019

Witold Bednarek	Łódź	43,07
Jerzy Cisło	Wrocław	42,92
Paweł Najman	Kraków	41,10
Paweł Kubit	Kraków	40,81
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,73
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fiett	Warszawa	31,23

782. Odpowiedź: nie. Uzasadnienie: długość krzywej to kres górny długości linii łamanych w nią wpisanych. Weźmy więc dowolną łamaną, wpisaną w rozważaną krzywą (utworzoną dla pewnego parametru $d \in (0, h)$); jej wierzchołki $P_0, P_1, \ldots, P_n$ leżą (w takim porządku) na owej krzywej, przy czym $P_0 \in AC$, $P_n \in BC$. Przedłużenia odcinków CP_i docierają do boku AB w punktach T_i. Ustalmy $i > 0$ i spójrzmy na czworokąt $P_{i-1}T_{i-1}T_iP_i$, którego boki $P_{i-1}T_{i-1}$ oraz T_iP_i mają długość d. Przyjmijmy, że punkt P_i jest nie mniej oddalony od prostej AB niż punkt P_{i-1} (gdy jest przeciwnie, zamieniamy role wskaźników $i-1$ oraz i). Niech punkt Q_i uzupełnia równoległobok $P_{i-1}T_{i-1}T_iQ_i$. Skoro półproste $\overrightarrow{T_{i-1}P_{i-1}}$, $\overrightarrow{T_iP_i}$ spotykają się (w punkcie C), odcinek T_iP_i przecina odcinek $P_{i-1}Q_i$. Trójkąt $P_iQ_iT_i$ jest równoramienny, jego osią symetrii jest symetralna odcinka P_iQ_i. Punkt P_{i-1} leży po tej stronie owej symetralnej co punkt P_i – zatem bliżej punktu P_i niż punktu Q_i. Tak więc $|P_{i-1}P_i| < |P_{i-1}Q_i| = |T_{i-1}T_i|$.

Taka nierówność zachodzi dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, wobec czego łamana $P_0P_1 \ldots P_n$ jest krótsza niż bok AB. Biorąc kres górny długości wszystkich takich łamanych, wpisanych w rozważaną krzywą, stwierdzamy, że jej długość nie przekracza długości boku AB.

[Korzystając ze wzoru całkowego na długość krzywej (najwygodniej we współrzędnvch biegunowych ze środkiem C), nietrudno się przekonać, że długość badanej krzywej jest ściśle malejącą funkcją parametru $d < h$. Dla $d = 0$ ta krzywa to odcinek AB; dla $0 < d < h$ jej długość jest więc ostro mniejsza niż $|AB|$.]