Klub 44 M

Rozwiązania zadań z numeru 4/2019

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

779. W pola planszy kwadratowej wpisujemy liczby całkowite (w każde pole jedną liczbę) tak, by liczby wpisane w dowolne dwa przyległe pola były równe lub różniły się o 1 (pola przyległe mają wspólny bok). Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć największą liczbę m taką, że przy każdym wypełnieniu planszy $n \times n$, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba pojawia się na co najmniej m polach planszy.

780. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorami: $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n - \sqrt{2n}\right)$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

779. Odpowiedź: maksymalna wartość m, o jakiej mowa, to $m = n$. Macierz $[a_{ij}]$ o wyrazach $a_{ij} = i + j - 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ daje przykład wypełnienia planszy, przy którym liczba n pojawia się n razy (cała jedna przekątna), a żadna liczba nie występuje więcej niż n razy. Pozostaje wykazać, że przy każdym wypełnieniu planszy, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba wystąpi $\geqslant n$ razy.

Weźmy pod uwagę dowolne takie wypełnienie i niech m_k oraz M_k oznaczają najmniejszą oraz największą liczbę w kolumnie k. Liczby w sąsiednich polach różnią się co najwyżej o 1, więc w k-tej kolumnie są wszystkie liczby całkowite z przedziału $[m_k, M_k]$.

Gdy $\max\{m_1, \ldots, m_n\} \leqslant \min\{M_1, \ldots, M_n\}$, wówczas pewna liczba całkowita należy do wszystkich przedziałów $[m_1, M_1]$, …, $[m_n, M_n]$. Jest ona obecna we wszystkich kolumnach, więc występuje $\geqslant n$-krotnie na planszy.

Gdy zaś $\max\{m_1, \ldots, m_n\} > \min\{M_1, \ldots, M_n\}$, znaczy to, że dla pewnych numerów kolumn k, l zachodzi nierówność $m_k \leqslant M_k < m_l \leqslant M_l$. Weźmy dowolny wiersz. Na przecięciu z kolumnami k i l są w tym wierszu: pewna liczba $\leqslant M_k$ oraz pewna liczba $\geqslant m_l$; zatem są w tym wierszu wszystkie liczby całkowite z przedziału $[M_k, m_l]$. Wiersz był dowolny, czyli każda z tych liczb (np. M_k) jest obecna we wszystkich wierszach – występuje wobec tego $\geqslant n$ razy. To uzasadnia odpowiedź.

780. Podaną równość rekurencyjną podnosimy stronami do kwadratu (zastępując literkę n literką k) i dostajemy równoważną zależność

$$x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + x_k^{-2}.$$

Dodajemy te równości dla $k = 0, \ldots, n-1$, otrzymując

$$x_n^2 - 1 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{-2}. \tag{1}$$

Stąd od razu widać, że $x_n > \sqrt{2n}$ (dla $n > 0$), i wobec tego

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k^{-2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_k^{-2} < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2} H_{n-1}, \tag{2}$$

gdzie – jak zwykle – H_m oznacza sumę odwrotności liczb naturalnych od 1 do m. Zależności (1) i (2) dają oszacowanie

$$x_n^2 < 2n + 2 + \frac{1}{2} H_{n-1}.$$

Skoro $x_n > \sqrt{2n}$, mamy stąd

$$0 < x_n - \sqrt{2n} = \frac{x_n^2 - 2n}{x_n + \sqrt{2n}} < \frac{x_n^2 - 2n}{2\sqrt{2n}} < \frac{2 + \frac{1}{2} H_{n-1}}{2\sqrt{2n}}. \tag{3}$$

Liczby uzyskane po prawej stronie tworzą ciąg zbieżny do zera; wynika to na przykład ze znanej równości asymptotycznej $H_n \sim \ln n$; albo – bardziej elementarnie – z nierówności $H_n < 3n^{1/3}$ (nietrudnej do wykazania przez indukcję). Dwustronne oszacowanie (3) pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n - \sqrt{2n}\right) = 0.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 773 ($WT = 1{,}78$) i 774 ($WT = 1{,}87$) z numeru 1/2019

Witold Bednarek	Łódź	41,66
Jerzy Cisło	Wrocław	41,51
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Paweł Najman	Kraków	39,69
Paweł Kubit	Kraków	39,40
Krzysztof Kamiński	Pabianice	37,32
Michał Koźlik	Gliwice	35,73