



Trzy rodzaje indukcji matematycznej

Bartłomiej BZDEGA

Dodając obustronnie $n + 1$ do równości $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, dowodzimy implikacji

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{T(n)} = \frac{1}{2}n(n + 1) \Rightarrow \underbrace{1 + 2 + \dots + (n + 1)}_{T(n+1)} = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2).$$

Zwróćmy uwagę, że druga równość jest analogiczna do pierwszej, z tą jedynie różnicą, że każde n zostało zastąpione przez $n + 1$. To tłumaczy nazwy $T(n)$ i $T(n + 1)$, które zostały tym równościom nadane.

Zauważmy, że $T(1)$ jest równością prawdziwą: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$. Wyżej udowodniona implikacja dla $n = 1$ ma postać $T(1) \Rightarrow T(2)$, zatem i równość $T(2)$ jest prawdziwa. Następnie biorąc $n = 2$, wnioskujemy prawdziwość $T(3)$ i tak dalej, przez cały zbiór liczb naturalnych. To oznacza, że $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego naturalnego n .

Powyższe rozumowanie jest przykładem dowodu przez indukcję. Ogólniej, *zasada indukcji matematycznej* mówi, że jeśli chcemy wykazać prawdziwość jakiegoś stwierdzenia $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq n_0$ (zwykle $n_0 = 1$), to wystarczy udowodnić $T(n_0)$ (baza indukcji), a następnie dla wszystkich naturalnych $n \geq n_0$ dowieść, że $T(n) \Rightarrow T(n + 1)$ (krok indukcji; stwierdzenie $T(n)$ nazywamy tu założeniem indukcyjnym, a $T(n + 1)$ – tezę indukcyjną).

Przedstawiamy poniżej jeszcze dwa rodzaje indukcji. Indukcję o głębokości $d > 1$ stosujemy w zadaniach 3 i 8, a silną indukcję w zadaniach 9 i 10.

Indukcja o głębokości d . Bazę indukcji stanowią stwierdzenia $T(n_0), T(n_0 + 1), \dots, T(n_0 + d - 1)$, a w kroku indukcyjnym dowodzimy implikacji $T(n) \wedge T(n + 1) \wedge \dots \wedge T(n + d - 1) \Rightarrow T(n + d)$ dla $n \geq n_0$.

Silna indukcja. Bazą jest stwierdzenie $T(n_0)$, a krokiem indukcyjnym $T(n_0) \wedge T(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge T(n - 1) \Rightarrow T(n)$ dla $n > n_0$.

Zadania. (*Uwaga.* Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.)

- Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić przez indukcję, że:
 - $3^n + 4^n < 5^n$ dla $n \geq 3$,
 - $12 \mid 7^n + 6n - 1$.
- Udowodnić nierówność Bernoulliego: $(1 + x)^n > 1 + nx$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \geq -1$ i liczb naturalnych n .
- Wiadomo, że $a_1 = 5, a_2 = 13$ oraz $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że $a_n = 2^n + 3^n$ dla wszystkich naturalnych n .
- Dowieść, że $n \geq 1$ różnych okręgów dzieli płaszczyznę na co najwyżej $n^2 - n + 2$ obszarów.
- Nazwijmy L-ką figurę złożoną z trzech kwadratów jednostkowych, w kształcie litery L. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że szachownicę o wymiarach $2^n \times 2^n$ z jednym usuniętym polem można rozciąć na L-ki.
- Udowodnić małe twierdzenie Fermata: $p \mid n^p - n$ dla każdej liczby pierwszej p i liczby naturalnej n .
- Niech n będzie liczbą naturalną. Dowieść, że istnieje n -cyfrowa wielokrotność liczby 2^n , w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 1 i 2.
- Wykazać, że dla $n \geq 7$ możemy tak umieścić w wierzchołkach n -kąta foremnego różne liczby od 1 do n , by wartość bezwzględna różnicy liczb z każdego dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem liczby naturalnej.
- Na stole leży $n \geq 1$ stosów monet, po jednej w każdym. W danej chwili możemy połączyć dwa dowolnie wybrane stopy w jeden. Jeśli połączymy stos a monet ze stosem b monet, to zapisujemy iloczyn ab . Te czynności wykonujemy aż do uzyskania jednego stosu n monet. Dowieść, że suma zapisanych iloczynów wynosi $\frac{1}{2}n(n - 1)$.
- Każdą liczbę naturalną pomalowano pewnym kolorem w taki sposób, że jeśli $a, b \geq 2$ są liczbami naturalnymi, to liczby $a + b$ i ab mają ten sam kolor. Dowieść, że wszystkie liczby naturalne większe od 4 mają ten sam kolor.

Uwaga. Wskazówki dotyczą tego, jak przeprowadzić krok indukcyjny. Trzeba jednak pamiętać, że nie wolno pominać bazy indukcji!
 1. (a) Założenie indukcyjne $3^n + 4^n < 5^n$ należy obustronnie pomnożyć przez 5. Otrzymamy wtedy nierówność, z której łatwo wydedukować tezę indukcyjną: $3^{n+1} + 4^{n+1} < 5^{n+1}$. (b) Z założenia indukcyjnego $12 \mid 7^n + 6n - 1$ wynika, że $7^n + 6n - 1 = 12a$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}$. Mamy udowodnić, że $12 \mid 7^{n+1} + 6(n+1) - 1$ jest dzielnikiem liczby $7^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 7 \cdot 7^n - 6(n+1) - 1 = 7 \cdot 7^n - 6n - 6 - 1 = 7 \cdot 7^n - 6n - 7$. Trzeba pomnożyć obie strony przez liczbę dodając $1 + 6n$, następnie wystarczą nam dowodząc, że $(1 + 6n)(7^n + 6n - 1) \leq 7 \cdot 7^n - 6n - 7$.
 2. Trzeba pomnożyć obie strony przez liczbę dodając $1 + 6n$, następnie wystarczą nam dowodząc, że $(1 + 6n)(7^n + 6n - 1) \leq 7 \cdot 7^n - 6n - 7$.
 3. Używamy indukcji o głębokości 2. Założenie indukcyjne $a_n = 2^n + 3^n \vee a_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ należy wykorzystać we wzorze rekurencyjnym z treści zadania w celu otrzymania tezy indukcyjnej $a_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$.
 4. Należy zauważyć i uzasadnić, że jeśli mamy n okręgów na płaszczyźnie, to po dorysowaniu jeszcze jednego liczbą szachownicę $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ z usuniętym polem na n sąsiednich pól. Aby móc zastosować założenie indukcyjne, potrzebujemy by wszystkie cztery je miały. W tym celu pierwszą L-kę należy wyciąć w odpowiedni sposób ze środka szachownicy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.
 6. Należy wykorzystać wzór dwumianowy Newtona dla wyrażenia $(n + 1)^p$ oraz fakt, że $p \mid \binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \dots, p - 1$.
 7. Niech a_n będzie poszukiwaną n -cyfrową wielokrotnością liczby 2^n . Szukaną wielokrotnością 2^{n+1} jest jedna z liczb: $10^n + a_n$ lub $2 \cdot 10^n + a_n$. Będziemy rozpatrywać jedynie takie numery n -kątów, w których $n - 1$ i n są przylisane sąsiednim wierzchołkom. Krok indukcyjny o głębokości 3 polega na podaniu trzech wierzchołków z liczbami $n + 3, n + 2$ i $n + 1$ pomiedzy tymi dwoma.
 9. Jeśli w ostatnim ruchu połączone stopy a monet ze stosem b monet ($a + b$), $(a + b)$ monet założenia indukcyjnego suma napisanych iloczynów wynosi $\frac{1}{2}(a + b)(a + b + 1) + ab$. Dla n nieparzystych ten sam kolor mają liczby $n + 1$ i $2 + \frac{n}{2}$. Dla n nieparzystych ten sam kolor mają liczby $n + 3$ i $1 + \frac{n-2}{2}$.

Wskazówki do zadań