Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2019

Zadania z matematyki nr 783, 784

Redaguje Marcin E. KUCZMA

783. Na płaszczyźnie narysowano N kwadratów o bokach równoległych i prostopadłych do ustalonego wspólnego kierunku. Niech S będzie zbiorem środków tych kwadratów; zakładamy, że jest to N różnych punktów oraz że żaden punkt zbioru S nie leży na brzegu żadnego kwadratu. Udowodnić, że można wyróżnić niektóre z tych N kwadratów tak, by każdy punkt zbioru S leżał w co najmniej jednym wyróżnionym kwadracie oraz w co najwyżej czterech wyróżnionych kwadratach.

784. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, które można zapisać w postaci sumy $p = a^2 + b^2$ $(a, b \geqslant 1$ całkowite) tak, by liczba $2ab$ była kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 784 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2019

Przypominamy treść zadań:

775. Znaleźć wszystkie czwórki liczb nieujemnych a, b, c, d, które jednocześnie spełniają nierówności
$$a + b \geqslant c + d, \quad ab + cd \geqslant (a + b)(c + d), \quad (a + b)cd \geqslant ab(c + d).$$

776. Sześcian o krawędzi długości k przecinamy płaszczyzną π, położoną w odległości d od środka sześcianu. Jaka jest maksymalna wartość d, przy której płaszczyzna π może mieć z każdą ścianą sześcianu co najmniej jeden punkt wspólny?

775. Niech $a, b, c, d \geqslant 0$ będą liczbami o rozważanej własności. Wielomian o pierwiastkach $-a$, $-b$, c, d
$$W(x) = (x + a)(x + b)(x - c)(x - d) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
ma współczynniki nieujemne, co wynika z podanych założeń:
$$A = a + b - c - d \geqslant 0,$$
$$B = ab + cd - ac - ad - bc - bd \geqslant 0,$$
$$C = -abc - abd + acd + bcd = -ab(c + d) + (a + b)cd \geqslant 0,$$
$$D = abcd \geqslant 0.$$
Skoro $A, B, C, D \geqslant 0$, zatem $W(x) > 0$ dla $x > 0$. Brak pierwiastków dodatnich oznacza, że $c = d = 0$.

Na odwrót, gdy $c = d = 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, zadane nierówności są spełnione. Rozwiązaniem zadania są czwórki $(a, b, 0, 0)$ z $a, b \geqslant 0$.

776. Przyjmijmy $k = 2$ i ustalmy prostokątny układ współrzędnych, w którym wierzchołkami sześcianu są punkty $(\pm1, \pm1, \pm1)$, a rzutem prostokątnym punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę π jest punkt $P = (a, b, c)$ o współrzędnych $a, b, c \geqslant 0$. Zatem $d^2 = |OP|^2 = a^2 + b^2 + c^2$; zaś płaszczyzna π jest dana równaniem $ax + by + cz = d^2$.

Załóżmy, że ma ona punkty wspólne ze wszystkimi ścianami sześcianu; więc np. ze ścianą o wierzchołkach $(1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, -1)$. Każda z półprzestrzeni $(\, ax + by + cz \leqslant d^2,\ ax + by + cz \geqslant d^2 \,)$ musi zawierać jeden z tych czterech wierzchołków. Zatem przy pewnym doborze znaków mamy nierówność $\pm a \pm b - c \geqslant d^2$. Skoro $a, b \geqslant 0$, znaczy to, że $a + b - c \geqslant d^2$.

Analogicznie $a - b + c \geqslant d^2$ oraz $-a + b + c \geqslant d^2$. Dodajemy te trzy nierówności i otrzymujemy
$$a + b + c \geqslant 3d^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2;$$
czyli, równoważnie,
$$\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{6}\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}.$$
Lewa strona to kwadrat odległości punktu P od punktu $Q = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Tak więc $|PQ| \leqslant \frac{1}{6}\sqrt{3}$. A ponieważ $|OQ| = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, ostatecznie $|OP| \leqslant |OQ| + |QP| \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Gdy $P = (a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, wszystkie nierówności stają się równościami; płaszczyzna o równaniu $x + y + z = 1$ leży w odległości $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ od O i spotyka wszystkie ściany. Dla $k = 2$ szukane maksimum wynosi więc $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; zaś w przypadku ogólnym – po przeskalowaniu – wynosi $\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot k$.

Rozwiązanie zadania M 1603.
Przypiszmy drużynom $2n$ punktów przestrzeni, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Jeśli dwie drużyny rozegrały ze sobą mecz pierwszego dnia, połączmy odpowiadające im punkty odcinkiem niebieskim, a jeśli drugiego dnia – odcinkiem czerwonym.

Zauważmy, że uzyskujemy w ten sposób układ łamanych zamkniętych, z których każda ma parzystą liczbę odcinków, gdyż w każdej z nich kolejne odcinki mają różny kolor. Wystarczy z każdej takiej łamanej wybrać co drugi wierzchołek – w ten sposób uzyskamy n punktów, z których żadne dwa nie są połączone odcinkiem. Drużyny odpowiadające tym punktom mają więc żądaną własność.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 769 ($WT = 1{,}62$) i 770 ($WT = 2{,}71$) z numeru 11/2018

Andrzej Kurach	Ryjewo	44,06
Marcin Małogrosz	Warszawa	43,64
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Michał Adamaszek	Kęty	39,75
Paweł Najman	Kraków	36,72
Paweł Kubit	Kraków	36,23
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Witold Bednarek	Łódź	35,31

Nowa twarz w Klubie 44: pan Andrzej Kurach. Witamy!