Zadania z matematyki nr 781, 782

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2019

781. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 0$ oraz parzystej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć kres górny wartości stosunku A/H, gdzie A i H to (odpowiednio) średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna n liczb wybranych dowolnie z przedziału $[a, b]$.

782. Dany jest trójkąt ABC, w którym wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość h. Na każdym odcinku CT, łączącym wierzchołek C z bokiem AB, odkładamy odcinek TP ustalonej długości $d < h$. Uzyskane w ten sposób punkty P tworzą pewną krzywą. Czy – jeśli liczba d jest dostatecznie mała – długość owej krzywej przekroczy długość boku AB?

Zadanie 782 zaproponował pan Adam Woryna

Rozwiązania zadań z numeru 1/2019

Przypominamy treść zadań:

773. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 3$. W każde pole kwadratowej planszy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb $-1, +1$, tak że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Wyznaczamy sumę liczb w każdym wierszu oraz sumę liczb w każdej kolumnie; dostajemy ciąg $2n$ liczb nieparzystych. Ile maksymalnie może być w tym ciągu liczb ujemnych?

774. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych m, n, że nierówność
$$\lfloor (m+n)a \rfloor + \lfloor (m+n)b \rfloor \geqslant \lfloor ma \rfloor + \lfloor mb \rfloor + \lfloor n(a+b) \rfloor$$
zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b.

773. Suma wszystkich wpisanych liczb jest dodatnia, zatem co najmniej jeden wiersz oraz co najmniej jedna kolumna musi mieć sumę dodatnią. W rozważanym ciągu $2n$ sum (wierszy i kolumn) może więc być co najwyżej $2n-2$ liczb ujemnych.

Dla każdego nieparzystego $n \geqslant 3$ ta wartość jest osiągalna. Ilustracja przedstawia przykładową realizację, gdy $n = 11$. Opis algorytmu: cały skrajny dolny wiersz oraz całą skrajną prawą kolumnę wypełniamy jedynkami. Po odcięciu tego fragmentu zostaje plansza kwadratowa o boku długości parzystej $n-1$. W jej górnym wierszu umieszczamy, kolejno od lewej, $(n-3)/2$ jedynek oraz $(n+1)/2$ minus jedynek. W kolejnych wierszach (planszy $(n-1) \times (n-1)$) powtarzamy ten układ z przesunięciem (w każdym kroku) o jednostkę w prawo; nadwyżkę wychodzącą poza prawy skraj przenosimy przy tym cyklicznie na skrajne lewe pole.

+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+
−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+
−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+
−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	+
−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	+
−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+
+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+
+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

W pełnej planszy $n \times n$ uzyskujemy przewagę minusów nad plusami we wszystkich wierszach i kolumnach z wyjątkiem ostatniego i ostatniej. Każdy z początkowych $n-1$ wierszy ma sumę -1, zaś ostatni wiersz ma sumę n, zatem suma całej tabeli wynosi 1. Stąd, ostatecznie, odpowiedź: szukane maksimum wynosi $2n-2$.

774. Będziemy używać oznaczenia (wychodzącego z mody): $x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$; jest to liczba z przedziału $[0, 1)$. Znane (i łatwe do sprawdzenia) własności tego symbolu:

(1) $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \{x\} \geqslant 1/2, \\ 0 & \text{gdy } \{x\} < 1/2 \end{cases}$ (dla $x \in \mathbb{R}$);

(2) $\{x\} + \{-x\} = 1$ (dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi podany w zadaniu warunek. Dla $a = b$ przybiera on postać

(3) $2\lfloor (m+n)a \rfloor \geqslant 2\lfloor ma \rfloor + \lfloor 2na \rfloor$.

To ma zachodzić dla wszystkich liczb $a \in \mathbb{R}$. Podstawiamy $a = 1/m$ oraz $a = -1/m$ i otrzymujemy
$$2\left\lfloor 1 + \frac{n}{m} \right\rfloor \geqslant 2 + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor \quad \text{oraz} \quad 2\left\lfloor -1 - \frac{n}{m} \right\rfloor \geqslant -2 + \left\lfloor -\frac{2n}{m} \right\rfloor.$$
Oznaczając $1 + \frac{n}{m} = x_0$, mamy więc
$$2\lfloor x_0 \rfloor \geqslant \lfloor 2x_0 \rfloor \quad \text{oraz} \quad 2\lfloor -x_0 \rfloor \geqslant \lfloor -2x_0 \rfloor.$$
To znaczy, że dla $x = x_0$ oraz dla $x = -x_0$ lewa strona (1) ma wartość niedodatnią. Zgodnie z własnością (1), ta wartość musi być zerem, co ma miejsce jedynie, gdy $\{x_0\} < 1/2$ oraz $\{-x_0\} < 1/2$. Dla tej liczby x_0 nie jest więc spełniona równość (2), co pokazuje, że x_0 jest liczbą całkowitą, czyli że n dzieli się przez m.

Wracamy do nierówności (3) i zauważamy, że dla $a = 1/(2n)$ jej prawa strona jest dodatnia. Wobec tego i lewa strona musi być dodatnia, skąd $(m+n)a = (m+n)/(2n) \geqslant 1$, czyli $m \geqslant n$. Ale n dzieli się przez m. Zatem $m = n$.

Na odwrót, gdy $m = n$, nierówność dana w zadaniu jest spełniona dla wszystkich liczb $a, b \in \mathbb{R}$. By to sprawdzić, oznaczmy $ma = na = A$, $mb = nb = B$; należy pokazać, że

(4) $\lfloor 2A \rfloor + \lfloor 2B \rfloor \geqslant \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor + \lfloor A + B \rfloor$.

Przy oznaczeniach $\lfloor A \rfloor = k$, $\{A\} = \alpha$, $\lfloor B \rfloor = l$, $\{B\} = \beta$, zależność (4) jest równoważna następującej:
$$\big(2k + \lfloor 2\alpha \rfloor\big) + \big(2l + \lfloor 2\beta \rfloor\big) \geqslant k + l + \big(k + l + \lfloor \alpha + \beta \rfloor\big);$$
czyli krócej:

(5) $\lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha + \beta \rfloor$.

Jeśli choć jedna z liczb α, β wynosi co najmniej $1/2$, lewa strona (5) wynosi co najmniej 1 i nierówność (5) zachodzi; a jeśli $\alpha, \beta < 1/2$, wówczas obie strony (5) są zerami.

Ostatecznie szukane pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$ to pary równych liczb.