Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2019

Zadania z matematyki nr 779, 780

Redaguje Marcin E. KUCZMA

779. W pola planszy kwadratowej wpisujemy liczby całkowite (w każde pole jedną liczbę) tak, by liczby wpisane w dowolne dwa przyległe pola były równe lub różniły się o 1 (pola przyległe mają wspólny bok). Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć największą liczbę m taką, że przy każdym wypełnieniu planszy $n \times n$, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba pojawia się na co najmniej m polach planszy.

780. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorami: $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\bigl(x_n - \sqrt{2n}\bigr)$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Zadanie 780 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2018

Przypominamy treść zadań:

771. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dla każdej pary różnych liczb rzeczywistych a, b, których różnica jest liczbą całkowitą.

772. Niech $M_n = 2^n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że następujące dwa warunki są równoważne:
(i) $2^n \equiv 2 \pmod{n}$; (ii) $2^{M_n} \equiv 2 \pmod{M_n}$.

771. Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ uzyskujemy z podanego równania (po podstawieniu $a = x - 1$, $b = x + 1$) równość

$$(1) \qquad 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1).$$

Wynika z niej, że funkcja f' jest różniczkowalna. Możemy więc zróżniczkować (1) stronami, otrzymując

$$(2) \qquad 2f''(x) = f'(x+1) - f'(x-1).$$

W równości (1) zastępujemy x przez $x+1$ oraz $x-1$:

$$2f'(x+1) = f(x+2) - f(x),$$
$$2f'(x-1) = f(x) - f(x-2);$$

równość (2) (pomnożona przez 2) przybiera postać

$$(3) \qquad 4f''(x) = f(x+2) - f(x) - f(x) + f(x-2).$$

Widać stąd, że i funkcja f'' ma pochodną. Różniczkujemy (3) stronami:

$$(4) \qquad 4f'''(x) = f'(x+2) - 2f'(x) + f'(x-2).$$

W równaniu danym w założeniach podstawiamy $a = x$, $b = x + 4$, następnie $a = x - 4$, $b = x$ i wreszcie $a = x - 4$, $b = x + 4$, otrzymując kolejno

$$4f'(x+2) = f(x+4) - f(x),$$
$$4f'(x-2) = f(x) - f(x-4),$$
$$8f'(x) = f(x+4) - f(x-4).$$

Równość (4) (pomnożona przez 4) daje w efekcie

$$16f'''(x) = \bigl(f(x+4) - f(x)\bigr) - \bigl(f(x+4) - f(x-4)\bigr) + \\ + \bigl(f(x) - f(x-4)\bigr) = 0.$$

Uzyskana równość zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. To znaczy, że f jest wielomianem stopnia najwyżej drugiego.

I na odwrót, każdy taki wielomian $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ spełnia równanie dane w założeniu zadania (i to nawet dla każdej pary różnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$) – co łatwo sprawdzić.

772. Dla $n = 1$ oba warunki są spełnione. Dalej przyjmujemy $n \geqslant 2$. Zapiszmy liczbę $M_n - 1$ jako

$$(5) \qquad M_n - 1 = qn + r; \qquad q, r \in \mathbb{Z}; \quad 0 \leqslant r < n.$$

Wobec określenia $M_n = 2^n - 1$ mamy kongruencję $2^n \equiv 1 \pmod{M_n}$, którą podnosimy do potęgi q: $2^{qn} \equiv 1 \pmod{M_n}$; stąd po pomnożeniu przez 2^r (i uwzględnieniu (5)):

$$(6) \qquad 2^{M_n - 1} \equiv 2^r \pmod{M_n}.$$

Jeśli zachodzi warunek (i), to n jest dzielnikiem liczby $2^n - 2$, równej $M_n - 1$, czyli w równości (5) jest $r = 0$. Ze związku (6) dostajemy $2^{M_n - 1} \equiv 1 \pmod{M_n}$; pomnożenie przez 2 daje warunek (ii).

Na odwrót, jeśli zachodzi warunek (ii), to daną w nim kongruencję (mod M_n) dzielimy stronami przez 2 (to dozwolone, bo M_n jest liczbą nieparzystą), otrzymując $2^{M_n - 1} \equiv 1 \pmod{M_n}$. W połączeniu z (6) dostajemy

$$(7) \qquad 2^r \equiv 1 \pmod{M_n}.$$

Ale $2^r \leqslant 2^{n-1} < M_n$, więc kongruencja (7) jest równością, skąd $r = 0$. To znaczy, w myśl (5), że n dzieli liczbę $M_n - 1 = 2^n - 2$, i mamy warunek (i).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 765 ($WT = 1{,}78$) i 766 ($WT = 2{,}44$) z numeru 9/2018

Piotr Kumor	Olsztyn	42,07
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,00
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69