KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 4

Zbiory i odwzorowania

Bartłomiej BZDĘGA

Aby wykazać, że zbiory A i B mają tyle samo elementów, wystarczy połączyć te elementy w pary (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Jeżeli każdy element zbioru A i każdy element zbioru B występuje w nich dokładnie raz, to $|A| = |B|$. Fakt ten nazywamy *zasadą bijekcji.*

Bywa, że każdy element zbioru A sparujemy z innym elementem zbioru B, ale być może w zbiorze B znajdują się dodatkowo elementy, które nie zostały dobrane w pary. W tej sytuacji $|A| \leqslant |B|$. Jest to dobra metoda szacowania liczby elementów zbioru A, o ile znamy $|B|$. Stosujemy ją w zadaniach 5, 8 i 11.

Ciąg binarny to taki, w którym mogą występować tylko zera i jedynki. Na użytek niniejszego artykułu będziemy – ogólniej – nazywać tak każdy ciąg, którego wyrazy mogą przyjmować tylko dwie z góry określone wartości.

Każdy podzbiór $P \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ możemy utożsamić z n-elementowym ciągiem binarnym, w którym na i-tym miejscu stoi 1, gdy $x_i \in P$; w przeciwnym razie na i-tym miejscu stoi 0. Z tego wynika, że podzbiorów zbioru n-elementowego jest tyle, co ciągów binarnych długości n, czyli 2^n. Ponadto ciągów binarnych długości n, zawierających dokładnie k jedynek jest tyle, co k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, czyli $\binom{n}{k}$. Ciągi binarne pomagają rozwiązać zadania 6, 7 i 8.

Zadania

1. Liczba n jest nieparzysta. Dowieść, że zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ ma tyle samo n-elementowych podzbiorów o parzystej sumie elementów, co n-elementowych podzbiorów o nieparzystej sumie elementów.
2. Żadne trzy przekątne n-kąta wypukłego nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest punktów przecięcia się przekątnych wewnątrz tego wielokąta?
3. Jeden punkt czerwony oraz $n \geqslant 3$ punktów niebieskich leży na wspólnym okręgu. Których wielokątów jest więcej: posiadających wyłącznie niebieskie wierzchołki, czy tych, które posiadają jeden czerwony wierzchołek, a pozostałe niebieskie?
4. Tramwaj 80-osobowy zatrzymywał się na 18 kolejnych przystankach: $P_1, P_2, \ldots, P_{18}$. Udowodnić, że można wskazać takie $i, j \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, że $i < j$ oraz żaden z pasażerów nie jechał z przystanku P_i do P_j.
   Uwaga. Zakładamy, że do tramwaju 80*-osobowego zmieści się co najwyżej* 80 *osób, choć praktyka być może pokazuje coś innego.*
5. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Każdy z nich zawiera co najmniej dwa elementy, a każde dwa mają co najwyżej jeden element wspólny. Wykazać, że $k \leqslant \binom{n}{2}$.
6. W wierzchołku prostokąta, którego boki mają długości wyrażające się liczbami naturalnymi m i n, znajduje się pchła. Każdy skok pchły ma długość 1 i jest równoległy do jednego z boków. Na ile sposobów pchła może się dostać do przeciwległego wierzchołka najkrótszą drogą?
7. Ustalmy całkowite $n > 0$ i $m \geqslant 0$. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych ma równanie $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$?
8. Nazwijmy n-kąt *miodowym*, jeśli można go rozciąć na sześciokąty foremne o boku 1. Dowieść, że liczba różnych (nieprzystających) n-kątów miodowych nie przekracza 2^n.
9. Dowieść, że dla ustalonego naturalnego n równania $x^2 + y^2 = n$ i $x^2 + y^2 = 2n$ spełnia tyle samo par liczb całkowitych (x, y).
10. Ustalmy liczbę naturalną n. Ile ciągów $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ spełnia równość $n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \ldots$?
11. Przypuśćmy, że pchła z szóstego zadania podróżuje niekoniecznie najkrótszą drogą, ale w każdym punkcie może się znaleźć najwyżej raz. Dowieść, że liczba różnych możliwych dróg pchły nie przekracza 2^{mn}.
12. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Spośród wierzchołków $(2n + 1)$-kąta foremnego wybieramy trzy, które wyznaczają trójkąt rozwartokątny. Na ile sposobów można to zrobić?

Wskazówki do zadań

1. Każdy podzbiór n-elementowy o parzystej sumie elementów można sparować z jego dopełnieniem w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, które również ma n elementów, a ich suma jest nieparzysta.

2. Punkt przecięcia się przekątnych n-kąta należy dobrać w parę z czwórką (nieuporządkowaną) wierzchołków n-kąta, które są końcami tych przekątnych.

3. Dla $k \geqslant 3$ każdy k-kąt o niebieskich wierzchołkach parujemy z $(k+1)$-kątem o jednym wierzchołkiem czerwonym, powstającym przez dołączenie tego wierzchołka. Bez pary pozostaną jedynie trójkąty z czerwonym wierzchołkiem, zatem wielokątów z czerwonym wierzchołkiem jest więcej.

4. Weźmy pod uwagę tylko tych pasażerów, którzy jechali z P_i do P_j dla $i \leqslant 9 < j$. Każdy z nich siedział w tramwaju pomiędzy przystankiem P_9 a P_{10}.

5. Przypiszmy każdemu ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dowolny jego dwuelementowy podzbiór. Przypisane podzbiory muszą być różne i są podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Najkrótsza droga to taka, w której pchła skacze tylko w dwóch kierunkach, powiedzmy w prawo (n razy) i w górę (m razy), w pewnej kolejności. Ciąg skoków pchły jest zatem ciągiem binarnym, w którym n razy występuje „prawo” i m razy „góra”.

7. Każde rozwiązanie równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ należy sparować z ciągiem binarnym
$$\underbrace{00\ldots0}_{x_1}1\underbrace{00\ldots0}_{x_2}1\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{x_n}.$$

8. Każdy kąt miodowego wielokąta ma miarę 120° albo 240°, więc ciąg jego kątów jest ciągiem binarnym.

9. Sposób parowania otrzymamy dzięki tożsamości $(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

10. Zapiszmy jednoznacznie $a_i = 2b_i + c_i$, gdzie $b_i, c_i \in \{0, 1\}$. Ciągi (b_i) i (c_i) odpowiadają rozwinięciom dwójkowym liczb B i C, które spełniają równość $2B + C = n$.

11. Droga przebyta przez pchłę dzieli prostokąt na dwie części – nazwijmy je czarną i białą – każda złożona z pewnej liczby całych kwadratów o wymiarach 1×1. Zbiór czarnych kwadratów 1×1 jest podzbiorem zbioru wszystkich mn kwadratów 1×1.

12. Dla różnych wierzchołków A i B danego $(2n+1)$-kąta rysujemy strzałkę $A \to B$, jeśli wędrując po jego obwodzie z A do B, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, przejdziemy po co najwyżej n bokach. Z każdego wierzchołka wychodzi n strzałek i tyle samo do każdego wchodzi. Każdy trójkąt rozwartokątny posiada jeden wierzchołek, z którego wychodzą dwie strzałki, i odwrotnie – każde dwie strzałki wychodzące z wspólnego wierzchołka wyznaczają trójkąt rozwartokątny.