Relacje

Mając dane dwa zbiory A i B, **relacją** zdefiniowaną pomiędzy tymi dwoma zbiorami matematycy nazywają po prostu podzbiór zbioru wszystkich par elementów, w których pierwszy jest ze zbioru A, a drugi ze zbioru B. Inaczej mówiąc, element ze zbioru A i element ze zbioru B mogą być w danej relacji lub w niej nie być. Relacje często występują na świecie, np. *posiadanie psa* jest relacją pomiędzy zbiorem wszystkich ludzi a zbiorem wszystkich psów. Człowiek o imieniu Dionizy jest w tej relacji z psem Dingiem wtedy i tylko wtedy, gdy Dingo jest jego pupilem.

Szczególnie interesujące wydają się relacje zdefiniowane na jednym zbiorze, czyli gdy $A = B$. Na przykład relacja $\leqslant$ zdefiniowana na liczbach rzeczywistych. Liczba a jest w relacji $\leqslant$ z liczbą b, jeśli a nie jest większe od b. Innym przykładem jest relacja *koloru* zdefiniowana na zbiorze wszystkich samochodów, gdzie dwa samochody są w tej relacji, jeśli są tego samego koloru. Jeszcze inny przykład to relacja *małżeństwo* zdefiniowana na zbiorze wszystkich ludzi.

Można badać cechy poszczególnych relacji. Powiemy, że dana relacja jest **zwrotna**, jeśli każdy element jest w relacji z samym sobą. Z wyżej wymienionych przykładów relacja $\leqslant$ oraz relacja koloru mają tę cechę (ale małżeństwo już nie). Relacja jest **symetryczna**, jeśli z tego, że element a jest w relacji z elementem b, wynika, że element b jest w relacji z elementem a. Widzimy, że relacja koloru oraz małżeństwo są przykładami takich relacji, zaś relacja $\leqslant$ nie jest. I w końcu, relacja jest **przechodnia**, jeśli z tego, że a jest w relacji z b i b jest w relacji z c, wynika, że a jest w relacji z c. Jasne jest, że $\leqslant$ oraz relacja tego samego koloru są przykładami tego typu relacji.

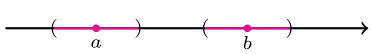
Relacja, która jest równocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywana jest **relacją równoważności**. Taka właśnie jest relacja koloru. Takie relacje mają wyjątkową cechę: generują podział danego zbioru na rozłączne podzbiory, których każde dwa elementy są w relacji. W wypadku relacji koloru jest to podział wszystkich samochodów na zbiory samochodów w poszczególnych kolorach: żółte, czerwone, niebieskie itd. Tak utworzone podzbiory matematycy nazywają **klasami abstrakcji**. Zauważmy również, że każdy podział rozważanego zbioru generuje na nim relację równoważności, w której dwa elementy są w relacji, o ile znajdują się w tej samej części podziału. Tę równoważność pomiędzy relacjami równoważności i podziałami matematycy nazywają **zasadą abstrakcji**.

Michał KORCH

Rozwiązanie zadania F 974.
Pomiary Dulonga i Petita były wykonywane w temperaturach bliskich temperatury pokojowej – badali oni pierwiastki, które w tej temperaturze występują w stanie stałym, to znaczy, że ich atomy tworzą regularną sieć krystaliczną. W temperaturze pokojowej główny wkład do ciepła właściwego pochodzi od drgań sieci krystalicznej. W temperaturze T energia drgań każdego z atomów wynosi $6kT/2 = 3kT$, to znaczy: po $kT/2$ na każdy ze stopni swobody (zmiana energii potencjalnej i kinetycznej drgań w każdym z trzech kierunków przestrzennych; $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmanna). Takie samo rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla związku chemicznego w stanie stałym każdy z atomów też da wkład $3kT$ do energii wewnętrznej kryształu. Wniosek: w stanie stałym ciepło molowe związku o m atomach w cząsteczce wynosi w przybliżeniu $3mR$ (prawo Koppa–Neumanna). Dla FeO, $c_p \approx 6R$.

Zbieżność

Zbieżność to jedno z najważniejszych pojęć analizy matematycznej, odnoszące się najczęściej do ciągów i funkcji (oraz rozmaitych obiektów matematycznych skonstruowanych przy ich użyciu, np. szeregów czy ciągów funkcyjnych). Tu zajmiemy się zbieżnością ciągów liczbowych. Mówimy, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, jeśli istnieje taka liczba a, że dowolnie blisko niej znajdują się *prawie wszystkie* (czyli wszystkie poza skończoną liczbą) wyrazy ciągu. Innymi słowy, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ możemy odrzucić skończoną liczbę początkowych wyrazów ciągu, tak by wszystkie pozostałe należały do przedziału $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, to mówimy, że **ciąg jest zbieżny do** a, i oznaczamy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Z tej definicji w łatwy sposób wynika na przykład, że ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę (rys. 1).



Rys. 1. Gdyby a, b były granicami pewnego ciągu, to w każdym z kolorowych przedziałów musiałyby znaleźć się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, a to jest sprzeczność.

Przykładem ciągu zbieżnego jest ciąg $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do zera. Ciągi, które nie są zbieżne, nazywamy **rozbieżnymi**. Rozbieżny jest np. ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$; istotnie, nie może on spełniać definicji zbieżności – żaden przedział długości 1 (co odpowiada $\varepsilon = \frac{1}{2}$) nie zawiera prawie wszystkich wyrazów tego ciągu.

Warto wspomnieć o szczególnym przypadku ciągów, które nie są zbieżne – o ciągach rozbieżnych do nieskończoności (nazywanych również ciągami zbieżnymi do granicy niewłaściwej). Są to ciągi spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby M można odrzucić skończenie wiele wyrazów ciągu, tak by