Zadania z matematyki nr 777, 778

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2019

777. W trójkącie ABC bok BC jest najdłuższy. Okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Na prostej KM leży taki punkt P, że odcinki PC oraz KL są równoległe. Dowieść, że prosta AP przechodzi przez środek odcinka KL.

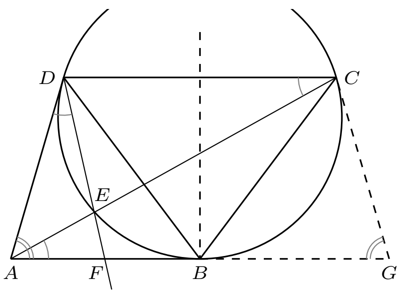
778. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie

$$\big(x+y+z\big)^2 = 2\big(x^2+y^2+z^2\big)$$

wraz z warunkiem $\mathrm{NWD}(x,y,z)=1$.

Zadanie 778 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2018



Przypominamy treść zadań:

769. W trapezie $ABCD$ o równoległych podstawach AB i CD zachodzą równości: $|AB|=|AD|$, $|BD|=|BC|$. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina przekątną AC w punkcie E. Dowieść, że prosta DE połowi bok AB.

770. Dla dodatnich liczb całkowitych $a_1,\ldots,a_m$ oraz n rozważamy sumę

$$K_n(a_1,\ldots,a_m)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\right)^{a_i}.$$

Dla ustalonych liczb całkowitych $m, n \geqslant 2$ wyznaczyć kres górny zbioru tych wartości wyrażenia $K_n(a_1,\ldots,a_m)$, które są mniejsze od 1.

769. Trójkąt BCD jest równoramienny; symetralna boku CD jest osią symetrii tego trójkąta, więc i okręgu na nim opisanego; prosta AB (równoległa do CD) jest styczna do tego okręgu. Skoro $|AB|=|AD|$, zatem prosta AD też jest styczna. Wynikają stąd równości kątów

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle CAB|.$$

Prosta DE przecina AB w punkcie, który nazwiemy F. Niech G będzie punktem symetrycznym do A względem B. Widzimy trapez równoramienny $AGCD$, z równymi kątami: $|\sphericalangle DAF|=|\sphericalangle AGC|$. Stąd i z wcześniejszej równości (przepisanej jako $|\sphericalangle ADF|=|\sphericalangle GAC|$) wynika podobieństwo trójkątów DAF i AGC. W konsekwencji

$$\frac{|AB|}{|AF|}=\frac{|DA|}{|AF|}=\frac{|AG|}{|GC|}=\frac{|AG|}{|GB|}=2,$$

co pokazuje, że F jest środkiem odcinka AB.

770. Nie tracimy ogólności, rozważając jedynie niemalejące ciągi $(a_1,\ldots,a_m)$, dzięki czemu wyrazy sumy

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{a_1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{a_2}+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^{a_m}$$

są uporządkowane nierosnąco. Niech q oraz r oznaczają iloraz i resztę z dzielenia m przez $n{-}1$. Wykażemy, że ciąg

$$(2)\qquad (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},\underbrace{2,\ldots,2}_{n-1},\ldots,\underbrace{q,\ldots,q}_{n-1},\underbrace{q{+}1,\ldots,q{+}1}_{r}) =: \\ =: (b_1,\ldots,b_m)$$

jest tym, dla którego suma (1) – pozostając mniejszą od 1 – jest maksymalna. Wynosi ona

$$(3)\qquad 1-\frac{1}{n^q}+\frac{r}{n^{q+1}}.$$

Niech więc $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$ będzie dowolnym ciągiem, dla którego wartość sumy (1) jest mniejsza od 1. Przypuśćmy, że pewien wyraz $(1/n)^k$, z wykładnikiem $k \geqslant 2$, powtarza się co najmniej n razy. Przyjmijmy, że k jest największym takim numerem. Wykreślamy n składników równych $(1/n)^k$ i zastępujemy je pojedynczym wyrazem $(1/n)^{k-1}$. Wartość sumy nie uległa zmianie, ale ciąg skrócił się o $n-1$ wyrazów. Dopisujemy więc na końcu $n-1$ ułamków, z wykładnikami tak dużymi, by wartość sumy (1) (która się powiększa!) pozostała mniejsza od 1 – bacząc jedynie, by żaden wyraz (z wykładnikiem $>k$) nie powtórzył się n-krotnie.

Powtarzamy tę modyfikację tak długo, dopóki istnieje blok jednakowych składników $(1/n)^j$, długości co najmniej n, z jakimkolwiek wykładnikiem $j \geqslant 2$. Mógłby ewentualnie pozostać taki blok dla wykładnika $j=1$, czyli złożony ze składników równych $1/n$ – ale to też nie jest możliwe, skoro przez cały czas była prowadzona kontrola, by suma nie osiągnęła wartości 1. Stąd wynika, że w dalszym ciągu dowodu można ograniczać uwagę do ciągów $(a_1,\ldots,a_m)$ o własnościach:

$$(4)\qquad a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m;\quad \text{żadna liczba nie powtarza się } n\text{-krotnie.}$$

Ciąg (2) spełnia te warunki. Dla wykazania jego optymalności weźmy pod uwagę dowolny inny ciąg $(a_1,\ldots,a_m)$, także spełniający powyższe warunki, i oznaczmy przez ℓ najwcześniejszy numer, dla którego $a_\ell \neq b_\ell$. Zatem odcinki $(a_1,\ldots,a_{\ell-1})$, $(b_1,\ldots,b_{\ell-1})$ są identyczne.

Nietrudno zauważyć, że $a_\ell > b_\ell$; w przeciwnym przypadku mielibyśmy $b_\ell > a_\ell \geqslant a_{\ell-1} = b_{\ell-1}$; to by oznaczało, że $b_{\ell-1}=b_\ell-1$, $a_\ell=a_{\ell-1}$ i że w ciągu (2) $b_{\ell-1}$ jest wyrazem kończącym blok złożony z $n{-}1$ równych liczb. Skoro zaś $a_i=b_i$ dla $i<\ell$ oraz $a_\ell=a_{\ell-1}$, mielibyśmy w ciągu (a_i) blok złożony z n równych liczb, wbrew warunkowi (4). Tak więc $a_{\ell-1}=b_{\ell-1}\leqslant b_\ell < a_\ell \leqslant a_{\ell+1}$.

Dokonujemy kolejnej modyfikacji ciągu $(a_1,\ldots,a_m)$, zastępując wyraz a_ℓ liczbą b_ℓ. Warunki (4) pozostają spełnione, wartość sumy (1) zwiększa się, zaś nowy ciąg pokrywa się z ciągiem (2) na odcinku $(b_1,\ldots,b_\ell)$. Po skończenie wielu takich krokach dochodzimy do ciągu $(b_1,\ldots,b_m)$. To pokazuje, że wartość sumy (1) dla wyjściowego ciągu $(a_1,\ldots,a_m)$ była mniejsza niż jej wartość dla ciągu $(b_1,\ldots,b_m)$ – czyli liczba dana wzorem (3), która wobec tego jest szukanym kresem górnym.