Lista uczestników ligi zadaniowej
Klubu 44F
po zakończeniu
roku szkolnego 2017/18 (po 661 zadaniach)

Marian Łupieżowiec	–	1–41,20
Tomasz Rudny	–	39,04
Jacek Konieczny	–	29,80
Ryszard Woźniak	–	28,77
Krzysztof Magiera	–	3–28,70
Jan Zambrzycki	–	1–23,13
Aleksander Surma	–	4–20,28
Michał Koźlik	–	4–19,20
Jerzy Witkowski	–	3–16,83
Paweł Perkowski	–	2–14,81
Tomasz Wietecha	–	13–14,79
Jacek Grela	–	13,91
Mateusz Kapusta	–	11,49
Dawid Zapolski	–	10,27
Andrzej Nowogrodzki	–	3–9,78
Jędrzej Biedrzycki	–	9,13
Sławomir Buć	–	5,45
Gerard Jachimowicz	–	5,10
Paweł Kubit	–	4,99
Piotr Bielak	–	1,77
Marek Sulczewski	–	0,44

* * *

Po raz pierwszy, odkąd redaguję Klub 44F, zdarzyło się, że zadanie osiągnęło współczynnik trudności $WT = 4$. Mowa o zadaniu **661** z czerwcowego numeru, gdzie należało odpowiedzieć na pytanie, po jakim czasie nić nawinięta na walec – po nadaniu prędkości prostopadłej do nici ciężarkowi na jej końcu – ponownie nawinie się na walec. Może wpływ na to miały letnie upały, chociaż drugie zadanie z czerwca na temat aberracji sferycznej soczewki miało z kolei najniższy współczynnik trudności $WT = 1{,}6$. Część uczestników tej serii ograniczyła się do rozwiązania tylko jednego zadania, inni nadesłali rozwiązania niepoprawne. W szczególności nietrafny był pomysł, że kulka porusza się po spirali Archimedesa, która jest złożeniem ruchu po prostej i obrotu po okręgu o nieruchomym środku. W naszym zadaniu środek okręgu przemieszczał się wzdłuż obwodu walca. Należało również uwzględnić fakt, że po całkowitym odwinięciu nici kulka zatacza półokrąg o promieniu równym długości nici i dopiero wtedy zaczyna nawijać się na walec.

Wydaje się, że uczestnicy klubu coraz więcej energii poświęcają na próby znalezienia rozwiązań w różnych źródłach, co chyba nie jest korzystną tendencją, bo to przecież ma być zabawa.

W zadaniu **659** ($WT = 3{,}1$) pytaliśmy o siłę, z jaką kwadratowa jednorodnie naładowana cienka płytka działa na punktowy ładunek. Ładunek umieszczony został nad środkiem płytki w odległości równej połowie krawędzi płytki, czyli w środku sześcianu, którego jedną ze ścian była płytka. Pozwalało to łatwo obliczyć strumień pola elektrycznego przez powierzchnię płytki i siłę, jaką ładunek działa na płytkę. Wszystkie nadesłane rozwiązania polegały na sumowaniu wkładów do wypadkowej siły od poszczególnych fragmentów płytki, co wymagało wyszukiwania w tablicach odpowiednich całek, i oczywiście takie znęcanie się nie było moim zamiarem. Poprawny wynik otrzymali **Mateusz Kapusta** i **Tomasz Wietecha**. Niektóre rozwiązania polegały na podziale płytki na równoległe cienkie pręty i sumowaniu wkładów. Niestety, pole elektryczne od pręta liczone było z prawa Gaussa, jakby pręt miał nieskończoną długość, podczas gdy odległość ładunku była porównywalna z długością pręta.

Drugie pod względem stopnia trudności okazało się zadanie **647** ($WT = 3{,}95$), gdzie należało znaleźć gęstość ładunku wewnątrz walca obracającego się ze stałą prędkością kątową w jednorodnym, prostopadłym do walca polu magnetycznym. Trzeba tu było wyznaczyć pole elektryczne w płytce, korzystając z warunku równowagi sił działających na swobodny elektron, a następnie z prawa Gaussa wyznaczyć gęstość ładunku.

Trudne okazało się również zadanie **650** ($WT = 3{,}74$), gdzie żadne z proponowanych rozwiązań nie uzyskało oceny wyższej niż 0,2. Polegało ono na znalezieniu czasu, po którym jeden relatywistyczny pojazd dogoni drugi, z punktu widzenia kosmonauty znajdującego się w jednym z pojazdów. W rozwiązaniu przedstawionym w majowej *Delcie* błędnie zapisany został niestety wzór na relatywistyczną prędkość względną – z pierwiastkiem w mianowniku!

Pozostałe zadania zostały rozwiązane bezbłędnie przez co najmniej jedną osobę. Za zadanie **652** ($WT = 2{,}8$ – przyspieszenie metalowej okrągłej płytki spadającej w równoległym do powierzchni Ziemi polu magnetycznym) maksymalną ocenę otrzymał **Dawid Zapolski**, za zadanie **653** ($WT = 2{,}86$ – parcie na dno w obracającym się naczyniu z wodą) **Tomasz Wietecha**. Pan **Tomasz** rozwiązał bezbłędnie czternaście zadań, **Jan Zambrzycki** siedem, **Mateusz Kapusta**, który niedawno rozpoczął przysyłać swoje rozwiązania, trzy.

Wszystkim, którzy przysłali w tym roku rozwiązania zadań, serdecznie dziękuję.

Zadania z matematyki nr 775, 776

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2019

775. Znaleźć wszystkie czwórki liczb nieujemnych a, b, c, d, które jednocześnie spełniają nierówności

$$a + b \geqslant c + d, \quad ab + cd \geqslant (a + b)(c + d), \quad (a + b)cd \geqslant ab(c + d).$$

776. Sześcian o krawędzi długości k przecinamy płaszczyzną π, położoną w odległości d od środka sześcianu. Jaka jest maksymalna wartość d, przy której płaszczyzna π może mieć z każdą ścianą sześcianu co najmniej jeden punkt wspólny?

Zadanie 776 zaproponował pan Adam Woryna.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2018

Przypominamy treść zadań:

767. Kwadrat o boku długości n, będącej liczbą naturalną, został podzielony prostymi poziomymi i pionowymi na n^2 kwadracików jednostkowych. Powstała siatka utworzona z $2n(n+1)$ odcinków jednostkowych (boków tych kwadracików). Używając czterech barw, należy te odcinki pokolorować (każdy odcinek jednym kolorem) tak, żeby każdy kwadracik jednostkowy miał boki różnych kolorów oraz by każdy bok dużego kwadratu uzyskał jednolity kolor – ale każdy inny. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 1$ jest to wykonalne?

768. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych $k, m, x \geqslant 1$ spełniające równanie

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k = (1+x)^m.$$

767. Przez *linie* będziemy rozumieli odcinki łączące przeciwległe boki zadanego kwadratu $ABCD$, prostopadłe do nich i przebiegające przez punkty kratowe. Gdy długość boku jest liczbą nieparzystą, żądane pokolorowanie da się banalnie wykonać: malujemy każdą linię (w całości) pojedynczym kolorem; linie równoległe do AB naprzemiennie, dwoma kolorami; linie równoległe do AD też naprzemiennie, dwoma pozostałymi kolorami.

Gdy długość boku jest liczbą parzystą – pokolorowanie, o jakim mowa, też jest wykonalne. Niech $ABCD$ będzie, jak poprzednio, kwadratem o boku długości nieparzystej, z pokolorowaniem opisanym powyżej. Przedłużamy jego boki AB i AD, każdy o jednostkę, otrzymując odcinki AB' i AD'. Niech punkt C' dopełnia kwadrat $AB'C'D'$. Poprzednie pokolorowanie odcinków AB i AD przedłużamy na całe linie AB' i AD'. Bok $B'C'$ malujemy kolorem odcinka DC; bok $D'C'$ malujemy kolorem odcinka BC.

W niewypukłym sześciokącie $BB'C'D'DC$ sposób malowania odcinków jednostkowych, równoległych do BB', jest już wymuszony przez postawione warunki – zaczynamy od BB' (który już ma kolor) i malujemy kolejne równoległe odcinki, kończąc na tym, który ma jeden koniec w punkcie C. Podobnie postępujemy z odcinkami jednostkowymi, równoległymi do DD'. Dzięki założeniu o nieparzystości długości BC i DC, kwadracik o wierzchołkach C i C' będzie miał brzeg czterobarwny.

768. Wykażemy, że równanie nie ma rozwiązań, w których $k > 1$ oraz $x > 1$. Z tożsamości

$$1 + x + \ldots + x^{2n} = (x+1)(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}) + x^{2n}$$

wynika spostrzeżenie:

(1) dla $x, n \in \mathbb{N}$ liczby $1 + x + \ldots + x^{2n}$ oraz $x+1$ są względnie pierwsze.

Stąd wniosek, że rozważane równanie nie może być spełnione, gdy k jest liczbą parzystą.

Gdy k jest liczbą nieparzystą postaci $4n+1$ ($n \geqslant 1$, bo rozważamy $k \geqslant 2$), zapisujemy lewą stronę równania jako iloczyn $(1 + x + \ldots + x^{2n})(x^{2n+1} + 1)$. Prawa strona równania, równa $(x+1)^m$, musiałaby się dzielić przez $(1 + x + \ldots + x^{2n})$, co nie jest możliwe, znów w myśl uwagi (1).

Gdy natomiast $k = 4n-1$, mnożymy równanie stronami przez $(x-1)$, otrzymując

$$x^{4n} - 1 = (x-1)(x+1)^m. \quad (2)$$

Lewa strona dzieli się przez $x^4 - 1$, więc i przez $x^2 + 1$. Liczba x nie może być parzysta, bo wówczas liczba $x^2 + 1$ byłaby względnie pierwsza z oboma czynnikami prawej strony (2). Niech więc $x = 2t+1$. Skoro lewa (więc i prawa) strona (2) dzieli się przez $x^2 + 1$, możemy napisać $(x-1)(x+1)^m = A \cdot (x^2+1)$ $(A \in \mathbb{N})$. Po podstawieniu $x = 2t+1$ wychodzi

$$2^m t(t+1)^m = A \cdot (2t^2 + 2t + 1) \quad (3)$$

– sprzeczność, bo liczba w nawiasie po prawej stronie (3) jest względnie pierwsza z każdym z czynników lewej strony (3).

Pozostają sytuacje trywialne, gdy k lub x równa się 1. Jeśli $k = 1$, to $m = 1$, zaś $x \in \mathbb{N}$ może być dowolne. A gdy $x = 1$, równanie mówi jedynie, że $k = 2^m - 1$. Tak więc wszystkimi rozwiązaniami równania są trójki (k, m, x) postaci $(1, 1, x)$ lub $(2^m - 1, m, 1)$ $(m, x \in \mathbb{N})$.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2017/18

Franciszek S. Sikorski	–	1–39,86
Piotr Kumor	–	13–39,63
Marcin Małogrosz	–	2–38,00
Krzysztof Maziarz	–	37,45
Andrzej Kurach	–	36,52
Krzysztof Kamiński	–	2–35,75
Paweł Kubit	–	6–35,69
Paweł Najman	–	7–34,02
Witold Bednarek	–	7–32,46
Michał Koźlik	–	32,23
Marek Spychała	–	2–27,55
Bartłomiej Pawlik	–	27,51
Jerzy Cisło	–	13–27,41
Michał Adamaszek	–	3–27,36
Janusz Wojtal	–	25,24
Jakub Węgrecki	–	24,54
Zbigniew Skalik	–	3–23,90
Janusz Fiett	–	2–23,56
Szymon Kitowski	–	23,49
Piotr Lipiński	–	1–21,84
Jędrzej Biedrzycki	–	19,85
Stanisław Bednarek	–	2–19,37
Kacper Morawski	–	17,91
Marcin Kasperski	–	4–15,33
Mikołaj Pater	–	14,83
Marek Prauza	–	4–13,69

Legenda (przykładowo): stan konta 7–32,46 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 32,46 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2016, 2017 lub 2018.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (13), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (19), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (12), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (6), J. Cisło (13), W. Bednarek (7), D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik, A. Dzedzej, M. Miodek (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, J. Fiett, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, M. Małogrosz, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

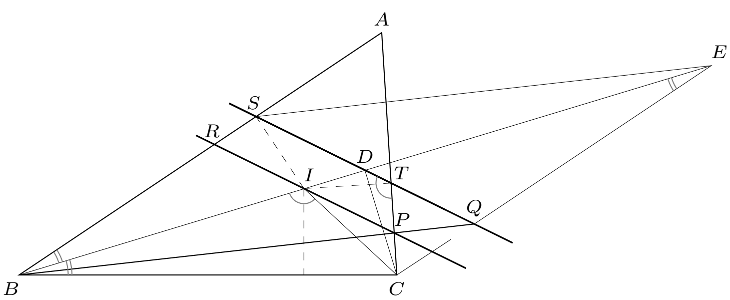
Łącznie 2^7 nazwisk(!).

Oto doroczne omówienie wybranych zadań. Alternatywne ciekawe rozwiązania oczywiście były, choć może nie w takiej obfitości, jak zazwyczaj. Przykuwają natomiast uwagę obszerne, bardzo fachowe komentarze do różnych zadań oraz niebanalne uogólnienia. W obrębie miejsca, jakim dysponujemy, nie sposób przedstawić wszystkich szczegółów przeprowadzonych rozumowań i rachunków. Ich uzupełnienie może być atrakcyjnym wyzwaniem dla Czytelników, których omawiane zagadnienia na serio zainteresują. Przypominamy znaczenie skrótów – współczynnik trudności: WT; liczba poprawnych rozwiązań: LPR.

* * *

Zadanie **746.** [$k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ ciąg rosnący (a_n): $a_n \in \mathbb{N}$; $\forall\, i_1, \ldots, i_m$: $a_{i_1} + \ldots + a_{i_m}$ nie jest k-tą potęgą; ciąg $(a_n^{1/n})$ ograniczony] (WT=1,75; LPR=9). Podawano różne przykłady. W kilku pracach powtórzył się przykład: $a_n = 2^n 3^{n+1}$ (dwójkę i trójkę można zastąpić inną parą liczb pierwszych). **Piotr Kumor** zwrócił uwagę, że wzór działa dla każdego k i że można go znaleźć np. w książce T. Andreescu, G. Dospinescu, *Problems from the Book*, z adnotacją, że już znacznie wcześniej zamieścił go *Kwant*. Zwrócił też uwagę na pracę: A. Dubickas, P. Šarka, *Infinite sets of integers whose distinct elements do not sum to a power*, `https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL9/Dubickas/dubickas11.pdf`, zawierającą obszerną dyskusję pokrewnych zagadnień.

Zadanie **748.** [Czy istnieje macierz 8×8 o wyrazach $0, \pm 1$, sumy wierszy i sumy kolumn wszystkie różne? a macierz 14×14?] (WT=1,64; LPR=11). Macierze $n \times n$ o tej własności istnieją dla każdego n parzystego (różne konstrukcje, niewiele odbiegające od firmowej). Dla nieparzystych n takich macierzy nie ma; **Janusz Olszewski** podał dowód, wcale nie skomplikowany; proponujemy go Czytelnikom jako interesujące rozszerzenie zadania.



Zadanie **749.** [$\triangle ABC$; okrąg wpisany (środek I) styczny do AB, AC w punktach S, T: $P \in AC$; $IP \| ST$; $Q = ST \cap BP \Rightarrow QC \| AB$] ($WT$=3,05; LPR=7). **T. Choczewski**, **B. Kubicki**, **M. Małogrosz** – firmowo. **Janusz Olszewski**, jak zwykle, dał kilka rozwiązań (trzy: z użyciem biegunowych, z użyciem tw. Pascala oraz rachunkowo). Rozwiązania rachunkowe znaleźli też **Z. Skalik**, **T. Wietecha**.

Odmienne rozwiązanie przedstawił **Jakub Węgrecki**: niech $D = BI \cap ST$, $R = PI \cap AB$; punkt I jest środkiem odcinka RP, więc D jest środkiem odcinka SQ. Budujemy równoległobok $SBQE$ (o środku symetrii D); punkty I, C, D, T leżą na jednym okręgu (bo $|\measuredangle BIC| = |\measuredangle CTS|$), więc skoro $IT \perp CT$, zatem $BD \perp CD$; wobec tego trójkąty CDB i CDE są przystające i z równości $|\measuredangle CED| = |\measuredangle CBD| = |\measuredangle DBA|$ wynika, że $EC \| AB$; i gotowe, bo $EQ \| AB$.

Zadanie **751.** [Siatka n^2 trójkącików jednostkowych tworzących trójkąt o boku n; węzły siatki ponumerowane; d = liczba trójkącików o wierzchołkach $i < j < k$, w tej kolejności tworzących trójkę zorientowaną dodatnio; $\min d$, $\max d$ =?] (WT=3,77; LPR=1 (2?)). Najtrudniejsze zadanie w omawianym sezonie. Rozwiązanie firmowe polegało na wyróżnieniu „lewej” strony każdego odcinka skierowanego (przez numerację) i zliczaniu obszarów (trójkącików lub „oceanu”), do których przylegają wyróżnione strony odcinków. Tą metodą zrobił to zadanie **Janusz Olszewski** (bezbłędnie) oraz (w zasadzie, jednak nie dopracowując części rachunkowej) **Paweł Kubit**. Jeszcze trzech autorów uzyskało dobre wyniki, jednak podając uzasadnienia, które można uznać raczej za agitacje niż dowody.

Zadanie **753.** [$D \in \triangle ABC$; $E = AD \cap BC$; $F = BD \cap AC$; $|AE| + |AF| = |BE| + |BF|$ $\Rightarrow |AC| + |AD| = |BC| + |BD|$] ($WT$=3,24; LPR=5). I znów: **Janusz Olszewski**, jako jedyny, znalazł rozwiązanie firmowe. **Szymon Kitowski** także podał perfekcyjne rozwiązanie, operując bardziej zaawansowanym aparatem (własności elips; izogonalność – nie przytaczamy tego rozumowania z uwagi na znacznie większą prostotę rozwiązania firmowego). Rozwiązania rachunkowe: **M. Małogrosz**, **T. Wietecha**, **Z. Skalik**. Jeszcze jedna praca zawierała kserokopię (bez podania źródła) treści zadania wraz ze *wskazówką* do rozwiązania firmowego – jednak bez dowodu.

Rozwiązanie zadania F 970. Poszukujemy wartości siły ściskającej (w przypadku wzrostu temperatury) lub rozciągającej szynę (w przypadku spadku temperatury) o odcinek równy zmianie jej długości wywołanej zmianą temperatury otoczenia. Mamy więc:

$$\beta L \Delta T = \frac{LF}{YS},$$

a więc

$$F = \beta Y S \Delta T.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $F \approx 3{,}84 \cdot 10^5$ N. Z powodu wielkiej wartości tej siły, koniec szyny był unieruchamiany w kierunkach prostopadłych do jej długości, a pozostawiona niewielka szczelina między jej „sąsiadkami” dopuszczała zmiany długości.

Zadanie **755.** [Wielomian P: $P+P''\geqslant 2P' \ \Rightarrow\ P\geqslant 0$] ($WT$=1,91; LPR=15). Dużo dobrych rozwiązań. **Piotr Kumor** zauważył, że – ogólnie – jeśli $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dowolną (niekoniecznie różniczkowalną) funkcją o tej własności, że funkcja $g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$ jest wypukła oraz ma skończoną, nieujemną granicę przy $x\to\infty$, wówczas g przyjmuje tylko wartości nieujemne; więc f też. Jeśli ponadto f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f+f''\geqslant 2f'$, wówczas wypukłość funkcji g jest automatyczna (banalny rachunek); to, że rozważana w zadaniu funkcja jest wielomianem, nie ma znaczenia (podobną uwagą opatrzył swoją pracę **M. Kasperski**).

Zadanie **758.** [Okręgi o promieniach r_1,r_2,r_3, parami styczne zewnętrznie oraz styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu $R\Rightarrow \sum r_i+2\sqrt{\sum r_ir_j}\leqslant 3R$] ($WT$=3,40; LPR=2). Zadanie zaproponował pan **Witold Bednarek**, wraz z rozwiązaniem, które zostało wydrukowane jako firmowe. Niebanalnym pomysłem było w nim wprowadzenie środka ciężkości trójkąta utworzonego przez środki trzech mniejszych okręgów.

Janusz Olszewski podał dowód, z którego wynotujemy dwa kluczowe lematy: dla dowolnych liczb $x,y,z,u,v,w\geqslant 0$:

$$(1)\qquad (y+z)u+(z+x)v+(x+y)w\geqslant \geqslant 2\sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{uv+vw+wu}\,;$$

dla dowolnego punktu P, leżącego wewnątrz trójkąta ABC (o bokach a,b,c) w odległościach a',b',c' od A,B,C mamy przy oznaczeniach $a'/a=u$, $b'/b=v$, $c'/c=w$:

$$(2)\qquad uv+vw+wu\geqslant 1.$$

Nierówność (1) zostawimy jako ciekawe ćwiczenie. Nierówność (2) została uzyskana pomysłowym rachunkiem na wektorach jako wniosek z $\left(u^{-1}\overrightarrow{PA}+v^{-1}\overrightarrow{PB}+w^{-1}\overrightarrow{PC}\right)^2\geqslant 0$. Teza zadania wychodzi, gdy A,B,C to środki mniejszych okręgów, P – środek dużego okręgu, i gdy w (1) przyjmiemy u,v,w z nierówności (2) oraz $x=r_1=s-a$, $y=r_2=s-b$, $z=r_3=s-c$, gdzie $2s=a+b+c$.

Piotr Kumor uzyskał rezultat nieco mocniejszy, korzystając ze *wzoru Kartezjusza*:

$$(3)\qquad 2\Big(R^{-2}+\sum r_i^{-2}\Big)=\Big(\sum r_i^{-1}-R^{-1}\Big)^2$$

(zachodzącego przy konfiguracji z zadania); wykazał bowiem, że jeśli czwórka liczb dodatnich r_1,r_2,r_3,R spełnia (3), to

$$(4)\qquad \sum r_i\leqslant\big(6\sqrt{3}-9\big)R$$

(szacowania i rachunki nie były proste); ostatnia nierówność implikuje tezę zadania, bo $\sqrt{\sum r_ir_j}\leqslant\big(\sum r_i\big)/\sqrt{3}$.

Z omawianej pracy dowiedzieliśmy się wielu ciekawych rzeczy: gdyby przez R oznaczyć promień małego okręgu, stycznego *zewnętrznie* do okręgów o promieniach r_i, wzór (3) zachowałby słuszność po zamianie minusa na plus; czwórka okręgów (w jednej lub drugiej z tych konfiguracji) przyjęła się pod nazwą *Soddy circles*; zaś całe zagadnienie doczekało się ogromnej literatury, również z uogólnieniami na wyższe wymiary (proszę wstukać `Soddy circles` do wyszukiwarki…). Jednak w całej tej obfitości nie tak łatwo znaleźć dowód wzoru (3) – tymczasem nie trzeba szukać daleko: pan Kumor wskazał artykuł Michała Kiezy *Czwarty okrąg* w Δ^6_{10}, z dowodem dla „małego” okręgu (wzór (3) z plusem); wariant dla „dużego” nietrudno wtedy wyprowadzić, stosując inwersję.

Zadanie **759.** [Punkty skupienia ciągu (x_n)? $x_0\in(3/2,2)$; $x_{n+1}=2^{2-x_n}$] (WT=2,86; LPR=7 (9?)). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego (analiza funkcji $f\circ f$, gdzie $f(x)=2^{2-x}$): **M. Adamaszek**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **M. Małogrosz**, **Z. Skalik**, **W. Bednarek**, **M. Kasperski** (prace trzech uczestników, wymienionych w pierwszej kolejności, wolne od jakichkolwiek usterek; w innych – pomyłeczki lub drobne luki); i jeszcze dwie prace z większymi lukami, jednak zawierające istotę rozumowania.

Zadanie **760.** [Istnieje nieskończenie wiele $x\in\mathbb{R}^+$: $x^{1/2}+x^{-1/2}\in\mathbb{N}$; $x^{1/3}+x^{-1/3}\in\mathbb{N}$] ($WT$=1,46; LPR=18). Uogólnienie (**P. Kumor**): dla każdego $n\in\mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb $x>0$ takich, że $x^{1/r}+x^{-1/r}\in\mathbb{N}$ dla $r=1,\ldots,n$; dobre są np. wszystkie liczby postaci $x=\big((k+\sqrt{k^2-4}\,)/2\big)^{jM}$, gdzie $M=\mathrm{nwd}(1,\ldots,n)$, zaś $j,k\in\mathbb{N}$ $(k>1)$ zmieniają się dowolnie.

Zadanie **762.** [$n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$; jeśli liczba 2^n-1 jest bezkwadratowa, to $\mathrm{nwd}(n,2^n{-}1)=1$, ale nie na odwrót] ($WT$=2,08; LPR=8). Implikacja w podaną stronę nie była trudna; wszystkie dowody podobne do firmowego. W drugą stronę potrzebny był kontrprzykład. Ten firmowy ($n=364$, $2^n{-}1$ podzielne przez 1093^2) opatrzony był sugestią posłużenia się komputerem. Czy było to niezbędne? Jasne, że nie (demagogia); wystarczyło „zgadnąć” (przez objawienie?); a sprawdzenie żądanej własności dało się już wykonać na papierze (choć na maszynce łatwiej).

Jak wielokrotnie bywało, **Piotr Kumor** sypnął ciekawymi informacjami. Tu kluczową rolę grają liczby pierwsze p, dla których $2^{p-1}-1$ dzieli się przez p^2; są to tzw. *liczby pierwsze Wiefericha*; oznaczmy ich zbiór przez $\mathcal{W}$. Gdy już mamy liczbę $p\in\mathcal{W}$, sensowne jest szukanie n (o żądanej własności) w postaci podwielokrotności lub wielokrotności liczby $p-1$. Choć mocna jest hipoteza, że zbiór $\mathcal{W}$ jest nieskończony, obecnie (lato 2018) znane są dwa jego elementy: 1093 oraz 3511 – to chyba najkrótszy ciąg w OEIS (A001220); tam, a także w wielu innych miejscach, można znaleźć różne wiadomości o związkach zbioru $\mathcal{W}$ z innymi zagadnieniami arytmetyki (google: `Wieferich primes`).

Janusz Olszewski pokazał (nie używając oznaczenia $\mathcal{W}$), że omawiana „implikacja odwrotna” zachodzi dla wszystkich liczb n o własności: $[\forall\, p\in\mathcal{W}\colon\ 2^n\not\equiv 1 \pmod{p^2}]$. Wówczas bowiem jeśli liczba 2^n-1 dzieli się przez p^2 dla pewnej liczby pierwszej p (zatem $p\notin\mathcal{W}$), bierzemy najmniejszy wykładnik δ, dla którego $p^2\mid 2^\delta-1$ (więc $\delta\mid n$); z twierdzenia Eulera wynika, że $p^2\mid 2^{p(p-1)}-1$; zatem $\delta\mid p(p-1)$, więc albo $\delta\mid p-1$, albo $p\mid\delta$. Pierwsza możliwość pociąga podzielność liczby $2^{p-1}-1$ przez $2^\delta-1$, więc i przez p^2 (wbrew założeniu $p\notin\mathcal{W}$); druga możliwość daje podzielność $p\mid n$; i koniec, bo $p^2\mid 2^n-1$, więc $\mathrm{nwd}(n,2^n{-}1)\geqslant p$.

Pozostałe kompletne prace: **M. Adamaszek**, **J. Cisło**, **M. Kasperski**, **A. Kurach**, **M. Miodek**, **K. Morawski**.

Zadanie **764.** [Przykład: $a,b\in\mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a,b)=1$; $x_1=a$, $x_{n+1}=b+x_1\cdot\ldots\cdot x_n$; wszystkie x_n złożone] (WT=1,00; LPR=10). Rozwiązania firmowe (z $b=4$); tylko **M. Małogrosz** inaczej: $a=63$, $b=2$; wtedy $x_n=c_n^3+1$, gdzie $c_n=2^{2^{n-1}}$; sprawdzić łatwo; ale jak na coś takiego wpaść?…