Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2019

Zadania z matematyki nr 773, 774

Redaguje Marcin E. KUCZMA

773. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 3$. W każde pole kwadratowej planszy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb $-1, +1$ tak, że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Wyznaczamy sumę liczb w każdym wierszu oraz sumę liczb w każdej kolumnie; dostajemy ciąg $2n$ liczb nieparzystych. Ile maksymalnie może być w tym ciągu liczb ujemnych?

774. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych m, n, że nierówność

$$\lfloor (m+n)a \rfloor + \lfloor (m+n)b \rfloor \geqslant \lfloor ma \rfloor + \lfloor mb \rfloor + \lfloor n(a+b) \rfloor$$

zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b.

Zadanie 774 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2018

Przypominamy treść zadań:

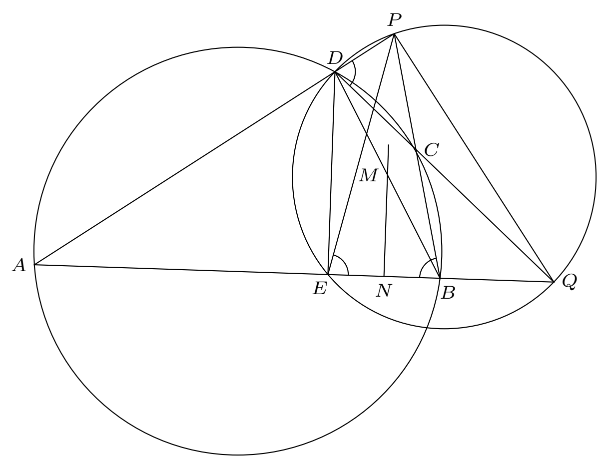
765. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma wierzchołek A. Zakładamy, że proste AD i BC przecinają się w punkcie P, zaś proste AB i DC przecinają się w punkcie Q, przy czym $AP \perp PQ$. Niech M będzie środkiem przekątnej BD. Wykazać, że $PM \perp AB$.

766. Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > 5/2$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geqslant M.$$

Im większa liczba M, tym lepsze rozwiązanie.

765. Z założenia, że $\sphericalangle DAB$ jest najmniejszym kątem czworokąta $ABCD$, nietrudno wywnioskować, że punkt B leży między A i Q, a punkt D między A i P. Weźmy pod uwagę okrąg o średnicy DQ; ów okrąg przechodzi przez punkt P (bo $AP \perp PQ$) oraz przecina odcinek AQ w punkcie, który nazwiemy E; zatem $DE \perp QE$.



Każdy z czworokątów $ABCD$ i $PDEQ$ ma okrąg opisany. Wynikają stąd równości kątów $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PDQ| = |\sphericalangle PEQ|$. Zatem trójkąt PEB jest równoramienny.

Niech N będzie środkiem odcinka EB. Skoro M jest środkiem odcinka DB, prosta NM jest równoległa do prostej DE – która jest prostopadła do AB. To znaczy, że prosta NM jest symetralną podstawy EB trójkąta równoramiennego PEB; przechodzi więc przez punkt P, i mamy tezę $PM \perp AB$.

766. Oznaczmy ilorazy widoczne pod symbolem pierwiastka kolejno: A, B, C, D, E (więc $A = a/(b+c)$, itd.). Wobec cykliczności można przyjąć, że $a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Dalej oznaczmy

$$p = \max\{b, c\}, \qquad q = \max\{c, d\}, \qquad r = \max\{d, e\}$$

i odnotujmy dolne oszacowania:

$$A \geqslant \frac{a}{2p}, \quad B \geqslant \frac{b}{2q}, \quad C \geqslant \frac{c}{2r}, \qquad \max\{C, D\} \geqslant \frac{q}{2a}, \quad \max\{D, E\} \geqslant \frac{r}{2a}.$$

Jeśli teraz $b \geqslant c$ (czyli $b = p$), wówczas

$$A^{1/5} + B^{1/5} + \left(C^{1/5} + D^{1/5}\right) \geqslant \left(\frac{a}{2p}\right)^{1/5} + \left(\frac{p}{2q}\right)^{1/5} + \left(\frac{q}{2a}\right)^{1/5}.$$

Jeśli natomiast $b \leqslant c$ (czyli $c = p$), wówczas

$$A^{1/5} + C^{1/5} + \left(D^{1/5} + E^{1/5}\right) \geqslant \left(\frac{a}{2p}\right)^{1/5} + \left(\frac{p}{2r}\right)^{1/5} + \left(\frac{r}{2a}\right)^{1/5}.$$

W obu przypadkach mamy po lewej stronie liczbę mniejszą niż rozważana suma $S = A^{1/5} + B^{1/5} + C^{1/5} + D^{1/5} + E^{1/5}$; zaś po prawej stronie – sumę trzech liczb, których iloczyn wynosi $2^{-3/5}$. Z nierówności między średnimi dostajemy oszacowanie $S > 3 \cdot 2^{-1/5}$. Liczba $M = 3 \cdot 2^{-1/5}$ spełnia wymagany warunek $M > 5/2$.

(Tę wartość M, wraz z powyższym uzasadnieniem, zaproponował pan Piotr Kumor, autor zadania; kto da więcej?).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 763 ($WT = 1{,}63$) i 764 ($WT = 1{,}00$) z numeru 6/2018

Michał Miodek	Warszawa	44,28
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Piotr Kumor	Olsztyn	39,63
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,00
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69

Michał Miodek – po raz trzeci! To trzydziesty ósmy Weteran Klubu 44 M.