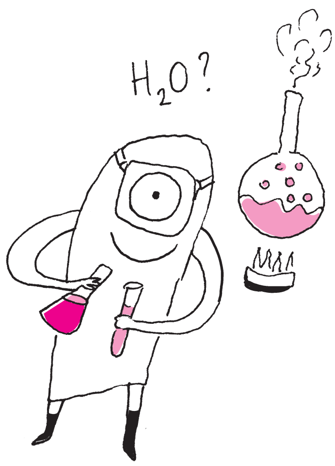
„Co jest grane” w Teorii Gier

*Tadeusz PŁATKOWSKI**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Teoria Gier (TG), traktowana jako dział matematyki, służy do wyjaśniania zachowań ludzi, zwierząt, przebiegu różnorodnych procesów w przyrodzie, ekonomii, medycynie, zachowania podmiotów w polityce, w sieciach społecznych, czyli – ogólniej – służy do opisu interakcji między różnego typu obiektami. Procesy te są na tyle złożone, że istniejące modele teoriogrowe nie przystają na ogół do obserwowanych sytuacji. Przykładem jest *równowaga Nasha*, która stanowi matematyczny opis stabilnego układu. Jednak w rzeczywistych sytuacjach ludzie nieczęsto grają strategiami tworzącymi taką równowagę. Jednym z największych wyzwań TG jest stworzenie modeli zachowań, które w zadowalającym stopniu są zgodne z obserwacjami, mają odpowiedni potencjał predykcyjny oraz możliwości testowania. Rozbieżności ilustruje np. gra „Ultimatum”. W jednym z wariantów gracz otrzymuje pewną kwotę i musi zaproponować wybraną przez siebie jej dodatnią część drugiemu graczowi. Jeżeli ten ją przyjmie, następuje podział, jeżeli nie, to obaj nic nie dostają. W przypadku skończonej liczby propozycji równowaga (zwana doskonałą) polega na tym, że pierwszy gracz proponuje najniższą możliwą kwotę, drugi zgadza się na wszystko (zawsze jest to dla niego opłacalne). Przeprowadzone eksperymenty pokazały, że proponowana suma była istotnie wyższa od najniższej możliwej. Znaczące rozbieżności między teorią a eksperymentami obserwuje się także w sytuacjach modelowanych innymi klasycznymi grami, np. w grze „W Stonogę”, czy w „Dylemacie Więźnia”.

Jest wiele powodów, dla których opis równowagowy nie przystaje do rzeczywistości, np. ograniczona racjonalność decydentów, niepewność dotycząca wypłat w grze, uwzględnianie przez graczy nie tylko swojego wyniku, ale też wyników innych uczestników gry; ponadto gracze mogą popełniać błędy, mogą być motywowani altruizmem, intuicją, wiarą, różnorodnymi emocjami, takimi jak zawiść, złośliwość, strach przed ryzykiem, a w przypadku gier powtarzalnych np. strachem przed odwzajemnianiem, czy troską o swoją reputację. Co więcej, zmiana wypłat, która nie zmienia równowag Nasha, może powodować istotne zmiany w decyzjach graczy. I odwrotnie, istotna zmiana wypłat może nie wpływać na ich decyzje. Mimo powyższych i innych ograniczeń równowaga Nasha (jak i inne koncepcje równowagi, np. *równowaga Bayesa–Nasha*, *równowaga korelacyjna*) jest użytecznym pojęciem, będącym obiektem intensywnych badań, np. w *grach dynamicznych*, *stochastycznych* oraz w *algorytmicznej teorii gier*, w której otwartym problemem jest opracowanie i implementacja przyjaznych obliczeniowo algorytmów wyznaczania równowag (lub stanów im bliskich) dla układów złożonych z bardzo wielu oddziałujących między sobą obiektów. Problemy takie mają bardzo często wysoką złożoność obliczeniową i występują zarówno w *grach strategicznych* (np. przy wyznaczaniu równowag Nasha), jak i w *grach koalicyjnych* (w których jedno z najbardziej popularnych rozwiązań, *wartość Shapleya*, wymaga uwzględnienia wszystkich podzbiorów zbioru graczy, co w przypadku wielkich układów przekracza obecne możliwości obliczeniowe). Coraz częściej TG jest używana do konstrukcji i analizy modeli wieloagentowych, do opisu aukcji lub szerzej: do projektowania mechanizmów (*mechanism design*) i ogólniej do badań nad sztuczną inteligencją.



Popularnym powiedzeniem jest, że wiek XXI to „wiek sieci”. Teoria gier jest istotnym elementem opisu różnego typu sieci, np. społecznościowych i komunikacyjnych. Węzłami sieci są gracze, krawędzie opisują ich wzajemne interakcje. Gry na sieciach modelują zachowania w sieciach społecznych, rozchodzenie się plotek, powstawanie zatorów komunikacyjnych, ataki na sieci komputerowe, ataki terrorystyczne albo – odwracając role – próby rozbicia sieci terrorystycznych np. przez analizę znaczenia, siły oddziaływania członków grup terrorystycznych, tworzących strukturę sieciową (Δ^{11}_{16}).

Powstanie i ewolucja Internetu były źródłem nowych modeli teoriogrowych i ciekawych problemów matematycznych. W 2003 roku został zaproponowany model Internetu, w którym węzły sieci są graczami, krawędzie – połączeniami, a użyteczność gracza (w tym przypadku koszt połączeń) jest mierzona długością i liczbą połączeń z innymi graczami. Autorzy przeanalizowali istnienie i własności równowag Nasha, przedstawili listę otwartych problemów, z których do dziś tylko kilka doczekało się rozwiązania. Otwartym problemem jest w szczególności pytanie, czy istnieją i jakie mają własności procesy dynamiczne, prowadzące do równowag (w tym i w późniejszych modelach tworzenia sieci).

Ważnym typem modeli teoriogrowych, stosowanych do wyjaśniania rzeczywistych zachowań, są modele uczenia, w których gracze zmieniają strategie w zależności od wypłat swoich i innych graczy, prowadzące do równowagi Nasha, np. „Replikator” czy „Gra fikcyjna” (*fictitious play*). Jednakże, m.in. w wyniku rozwoju ekonomii eksperymentalnej i po uwzględnieniu osiągnięć psychologii, stało się jasne, że ludzie zachowują się inaczej, niż przewidują modele uczenia.

Jednym z intrygujących problemów, który do tej pory nie ma powszechnie akceptowanego rozwiązania, jest zagadnienie ewolucji kooperacji w grupach ludzkich, w których interakcje są opisywane formalizmem TG. Najczęściej stosowanymi modelami takich sytuacji są *dylematy społeczne*, w szczególności „Dylemat Więźnia” i (w przypadku wielu graczy) „Dylemat Wspólnych Zasobów”. Można przewidywać, że nowe modele będą w szerszym stopniu uwzględniały wzmiankowane wyżej aspekty behawioralne i neurobiologiczne takich interakcji.

Czytelnikowi pragnącemu rozszerzyć swoją wiedzę w obszarze problemów otwartych TG polecamy:

[1] A. Fabrikant et al., *On a network creation game*, PODC '03 (2003) 347-351;
[2] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*, (2007) Cambridge;
[3] Y. Shoham, K. Leyton-Brown, *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*, (2008) Cambridge Univ. Press;
[4] E. Elkind, K. Leyton-Brown, *Algorithmic Game Theory and Artificial Intelligence*, AI Magazine, 31, 4 (2010);
[5] M. Shubik, *The Present and Future of Game Theory*, Discussion Paper 1808 (2011);
[6] V. Fragnelli, G. Gambarelli, *Open problems in the theory of cooperative games*, IGTR, 15 2, 3 (2013);
[7] M.O. Jackson, Y. Zenou, Games on Networks, *Handbook of Game Theory with Economic Applications* (2015) Elsevier;
[8] E. Maskin, *How Can Cooperative Game Theory Be Made More Relevant to Economics?* Open Problems in Mathematics, J.F. Nash, Jr., M.Th. Rassias (eds.), Springer Int. Publ. (2016).

Mnożenie nie tylko macierzy

*Marcin MUCHA**

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Tematem tego artykułu jest mnożenie macierzy, ale zaczniemy od problemu nieco prostszego – mnożenia wielomianów. Niech A i B będą wielomianami stopnia n, $A(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $B(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$. Iloczynem A i B jest wielomian $C(x)=\sum_{i=0}^{2n}c_ix^i$, gdzie $c_i=\sum_{0\leqslant k\leqslant i}a_kb_{i-k}$ (przyjmujemy $a_k=b_k=0$ dla $k>n$).

Mnożenie wielomianów za pomocą tego wzoru wymaga rzędu n^2 operacji. Okazuje się jednak, że można to zrobić szybciej. Jako pierwszy zauważył to Anatolij Karatsuba już w 1960 roku. Algorytm Karatsuby opiera się na następującym spostrzeżeniu. Rozważmy iloczyn wielomianów szczególnie prostej postaci:

$$(a_nx^n+a_0)(b_nx^n+b_0)=a_nb_nx^{2n}+(a_nb_0+b_na_0)x^n+a_0b_0.$$

Wydaje się, że do obliczenia współczynników wyniku potrzebne są cztery mnożenia, ale wystarczą trzy, gdyż

$$a_nb_0+b_na_0=(a_0+a_n)(b_0+b_n)-a_0b_0-a_nb_n.$$

Co ciekawe, sztuczka zmniejszania liczby mnożeń była znana już Gaussowi, który używał jej do mnożenia liczb zespolonych za pomocą trzech mnożeń.

W ogólnym przypadku, aby pomnożyć dwa wielomiany A,B stopnia $2n-1$, zapisujemy A następująco:

$$A(x)=\sum_{0\leqslant i<n}a_ix^i+x^n\Big(\sum_{0\leqslant i<n}a_{i+n}x^i\Big),$$

i analogicznie B, a następnie korzystamy z wyprowadzonej właśnie tożsamości. Sprowadzamy w ten sposób jedno mnożenie wielomianów stopnia $2n-1$ do