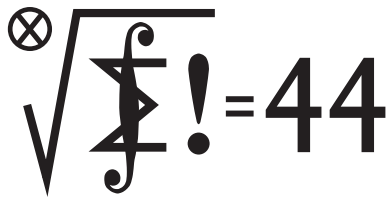


### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2019



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 759 ( $WT = 2,86$ ) i 760 ( $WT = 1,46$ ) z numeru 4/2018

Tomasz Wietecha	Tarnów	42,51
Tomasz Choczewski	Szczecin	42,49
Janusz Olszewski	Warszawa	41,77
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Michał Miodek	Warszawa	37,70
Piotr Kumor	Olsztyn	36,55
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	34,23

### Zadania z matematyki nr 769, 770

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**769.** W trapezie  $ABCD$  o równoległych podstawach  $AB$  i  $CD$  zachodzą równości:  $|AB| = |AD|$ ,  $|BD| = |BC|$ . Okrąg opisany na trójkącie  $BCD$  przecina przekątną  $AC$  w punkcie  $E$ . Dowieść, że prosta  $DE$  połowi bok  $AB$ .

**770.** Dla dodatnich liczb całkowitych  $a_1, \dots, a_m$  oraz  $n$  rozważamy sumę

$$K_n(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{n}\right)^{a_i}.$$

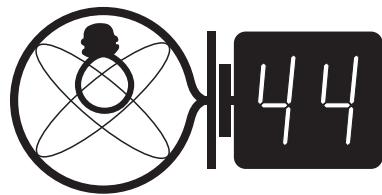
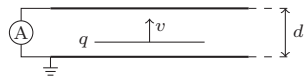
Dla ustalonych liczb całkowitych  $m, n \geq 2$  wyznaczyć kres górny zbioru tych wartości wyrażenia  $K_n(a_1, \dots, a_m)$ , które są mniejsze od 1.

Zadanie 770 zaproponował pan Adam Woryna.

### Zadania z fizyki nr 666, 667

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**666.** Między okładkami kondensatora płaskiego porusza się ze stałą prędkością  $v$  cienka płytką naładowana równomiernie ładunkiem  $q$ . Znaleźć natężenie prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku. Odległość między okładkami wynosi  $d$ , efekty brzegowe można zaniedbać.



**667.** W ustawionym pionowo zamkniętym z dwóch stron cylindrze, znajduje się mieszanina dwóch gazów doskonałych o masach molowych  $\mu_1, \mu_2$  i masach odpowiednio  $m_1, m_2$ . Wewnątrz cylindra znajduje się tłok o masie  $M$ , który jest przepuszczalny tylko dla gazu pierwszego. Początkowo tłok znajduje się przy górnej podstawie cylindra, a następnie zostaje puszczone swobodnie. Ile moli gazu pierwszego znajdować się będzie po ustaleniu się równowagi powyżej tłoka? Temperatura układu jest stała i wynosi  $T$ . Tarcie tłoka o ścianki można zaniedbać. Wysokość cylindra (nie uwzględniając grubości tłoka) jest równa  $l$ .



**Rozwiązanie zadania F 964.** Siła przyciągania Ziemia-Księżyc jest źródłem siły dośrodkowej w ruchu orbitalnym Księżycy, co prowadzi do warunku:

$$\frac{GM_Z}{r^2} = \omega^2 r,$$

gdzie  $r$  oznacza odległość środków Ziemi i Księżycy.

W układzie nieinercyjnym rotującym z prędkością  $\omega$  wokół środka Ziemi (duża masa Ziemi pozwala nam utożsamić jej środek ze środkiem masy układu Ziemia-Księżyc) na cząstkę pyłu o masie  $m$  leżącą na Księżycu najdalej od Ziemi działa więc wypadkowa siła „do Księżycy”:

$$F_z = \frac{GM_K m}{(r + R_K)^2} + \frac{GM_K m}{R_K^2} - m\omega^2 R_K,$$

a na podobną cząstkę najbliższej Ziemi siła:

$$F_w = \frac{GM_K m}{R_K^2} + m\omega^2 (r - R_K) - \frac{GM_K m}{(r - R_K)^2}.$$

Dla  $r \gg R_K$  mamy

$$\frac{1}{(r \pm R_K)^2} \approx \frac{1}{r^2} \left(1 \mp 2 \frac{R_K}{r}\right).$$

W tym przybliżeniu

$$F_z \approx F_w \approx \frac{GM_K m}{R_K^2} - \frac{3GM_Z m R_K}{r^3} > 0.$$

Ostatnia równość oznacza, że cząstka jest dociskana do Księżycy. Ostatecznie otrzymujemy warunek:

$$r > R_K \sqrt[3]{\frac{3M_Z}{M_K}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych  $r > 3 \sqrt[3]{9} R_K \approx 6,24 R_K \approx 10\,860$  km.

Obliczona odległość  $r$ , to około 6,2 promienia Księżycy  $R_K$ , a więc warunek  $r \gg R_K$  jest słabo spełniony, stąd w treści zadania, dla bezpieczeństwa pada określenie „oszacuj”.

Okres obiegu Księżycy w obliczonej odległości od Ziemi wynosiłby około 3 godziny 7 minut zamiast 27 i 1/3 dnia.

Warto jednak pamiętać, że aktualnie Księżyc oddala się od Ziemi w tempie niecałych 4 cm/rok.