Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

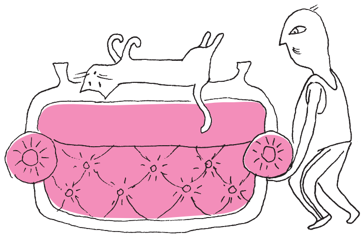
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2018

Zadania z matematyki nr 767, 768

Redaguje Marcin E. KUCZMA

767. Kwadrat o boku długości n, będącej liczbą naturalną, został podzielony prostymi poziomymi i pionowymi na n^2 kwadracików jednostkowych. Powstała siatka, utworzona z $2n(n+1)$ odcinków jednostkowych (boków tych kwadracików). Używając czterech barw, należy te odcinki pokolorować (każdy odcinek jednym kolorem) tak, żeby każdy kwadracik jednostkowy miał boki różnych kolorów oraz by każdy bok dużego kwadratu uzyskał jednolity kolor – ale każdy inny. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 1$ jest to wykonalne?



768. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych $k, m, x \geqslant 1$, spełniające równanie

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k = (1+x)^m.$$

Zadanie 768 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2018

Przypominamy treść zadań:

763. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia 2, o współczynnikach rzeczywistych, oraz liczba naturalna $n \geqslant 1$. Udowodnić, że może istnieć co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n, spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$.

764. Czy istnieją liczby naturalne $a, b \geqslant 1$, względnie pierwsze i takie, że wzór rekurencyjny

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = b + \prod_{k=1}^{n} x_k$$

generuje ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$, którego wszystkie wyrazy są liczbami złożonymi?

763. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. Przypuśćmy, że dla ustalonej liczby $n \geqslant 1$ istnieją dwa różne wielomiany Q_1, Q_2 stopnia n, spełniające podane równanie. Oznaczmy ich współczynniki wiodące przez A_1, A_2 (więc $Q_i(x) = A_i x^n + \ldots$); $A_1, A_2 \neq 0$. Przyrównując współczynniki wiodące po obu stronach równania $P(Q_i(x)) = Q_i(P(x))$, widzimy, że $aA_i^2 = A_i a^n$ (dla $i = 1,2$). Zatem $A_1 = a^{n-1} = A_2$. Stąd wynika, że różnica $R(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ jest niezerowym wielomianem stopnia $m < n$.

Odejmujemy stronami równania $Q_i(P(x)) = P(Q_i(x))$ (dla $i = 1,2$) i przekształcamy uzyskaną równość:

$$Q_1\big(P(x)\big) - Q_2\big(P(x)\big) = a\big(Q_1(x)^2 - Q_2(x)^2\big) + b\big(Q_1(x) - Q_2(x)\big);$$
$$R\big(P(x)\big) = R(x) \cdot \big(aQ_1(x) + aQ_2(x) + b\big).$$

Iloczyn po prawej stronie jest wielomianem stopnia $m+n$; wielomian po lewej stronie ma stopień $2m$. To już sprzeczność, skoro $m < n$; dwa różne wielomiany Q_1, Q_2 stopnia n o podanej własności istnieć nie mogą.

764. Liczby a, b, o jakie pyta zadanie, istnieją; można znaleźć wiele takich par. Przykład Autora (W. Bednarek): $a = 21$, $b = 4$. Wówczas $x_1 = 21$, $x_2 = 25$, i dalej (dla każdego n):

$$x_{n+1} = 4 + x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$
$$x_{n+2} = 4 + x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 4 + (x_{n+1} - 4)x_{n+1} = (x_{n+1} - 2)^2$$

– jest to liczba złożona (różnica w ostatnim nawiasie przekracza 1, bo ciąg jest rosnący).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 757 ($WT = 1{,}90$) i 758 ($WT = 3{,}40$) z numeru 3/2018

Tomasz Choczewski	Szczecin	40,78
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,19
Janusz Olszewski	Warszawa	37,45
Michał Miodek	Warszawa	36,24
Piotr Kumor	Olsztyn	35,09
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,29
Paweł Kubit	Kraków	32,77