Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2018

Zadania z matematyki nr 765, 766

Redaguje Marcin E. KUCZMA

765. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma wierzchołek A. Zakładamy, że proste AD i BC przecinają się w punkcie P, zaś proste AB i DC przecinają się w punkcie Q, przy czym $AP \perp PQ$. Niech M będzie środkiem przekątnej BD. Wykazać, że $PM \perp AB$.

766. Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > 5/2$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geqslant M.$$

Im większa liczba M, tym lepsze rozwiązanie.

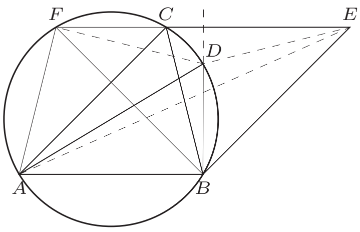
Zadanie 766 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2018

Przypominamy treść zadań:

761. Trójkąt ABC (nie prostokątny) jest wpisany w okrąg o średnicy AD. Punkt E jest symetryczny do A względem środka boku BC. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i BDE mają równe promienie.

762. Rozważamy liczby naturalne $n \geqslant 2$.
(a) Udowodnić, że jeśli liczba $2^n - 1$ jest bezkwadratowa, to liczby n oraz $2^n - 1$ są względnie pierwsze.
(b) Pokazać, że nie zachodzi implikacja odwrotna.



761. Czworokąt $ABEC$ jest równoległobokiem. Niech prosta EC przecina okrąg, opisany na trójkącie ABC, w punktach C i F (gdy jest styczna, przyjmujemy $F = C$). Powstaje trapez równoramienny $ABCF$ lub $ABFC$ (gdy $F = C$ – trójkąt równoramienny). W każdym przypadku $|BE| = |AC| = |BF|$.

Trójkąt ABC z założenia nie jest prostokątny, więc żaden jego bok nie pokrywa się ze średnicą AD, na której oparty jest kąt prosty ABD; a ponieważ $AB \| CE$, zatem $BD \perp CE$. To znaczy, że w trójkącie równoramiennym EBF prosta BD jest symetralną boku EF. W konsekwencji trójkąt BDE jest względem niej symetryczny do trójkąta BDF. Okręgi opisane na tych trójkątach są przystające; to już teza, bo drugi z tych okręgów jest też opisany na trójkącie ABC.

762. (a) Przypuśćmy, że liczby n oraz $2^n - 1$ mają wspólny dzielnik pierwszy p (jasne, że $p > 2$). Wykażemy, że wówczas liczba $2^n - 1$ dzieli się przez p^2 (nie jest więc bezkwadratowa). Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata, $2 \equiv 2^p \pmod{p}$. Podnosimy tę kongruencję stronami do potęgi n/p, otrzymując $2^{n/p} \equiv 2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Zatem $2^{n/p} = kp + 1$ dla pewnej liczby całkowitej k. Stąd

$$2^n = \bigl(1 + kp\bigr)^p = 1 + \binom{p}{1} kp + \binom{p}{2} (kp)^2 + \ldots + \binom{p}{p} (kp)^p,$$

czyli $2^n \equiv 1 \pmod{p^2}$; a to była nasza teza.

(b) Przykład pokazujący, że nie zachodzi implikacja odwrotna, nie tak łatwo znaleźć (mała szansa, że trafimy, zwyczajnie próbując – bez komputera ciężko). Prosty program, który dla zadanej liczby pierwszej p kontroluje dwie końcowe cyfry rozwinięcia (przy podstawie p) kolejnych potęg dwójki, pozwala znaleźć moment powtórzenia końcówki 01, czyli wykładnik n, dla którego $2^n = (** \ldots **01)_p \equiv 1 \pmod{p^2}$. Powtarzamy tę procedurę dla kolejnych liczb pierwszych p; warto przy tym, dla oszczędności czasu, ograniczyć zakres wykładnika, np. do $n < 1000$. W ten sposób szybko znajdujemy parę $p = 127$, $n = 889$; nie jest ona jednak szukanym kontrprzykładem, bowiem dla tej pary zachodzą związki $n = 7p$, $2^7 \equiv 1 \pmod{p}$, z których nietrudno wynika, że liczby n i $2^n - 1$ nie są względnie pierwsze.

Następna znaleziona para $p = 1093$, $n = 364$ jest już dobra: gdyby liczby $n = 4 \cdot 7 \cdot 13$ oraz $2^n - 1$ nie były względnie pierwsze, ta ostatnia musiałaby się dzielić przez 7 lub 13; ale minimalne wykładniki α, β, dla których $2^\alpha \equiv 1 \pmod{7}$, $2^\beta \equiv 1 \pmod{13}$, to $\alpha = 3$, $\beta = 12$, więc wykładnik n musiałby się dzielić przez 3; a tak nie jest. Skoro zaś ta para została wygenerowana przez algorytm, zapewniający podzielność $2^n - 1$ przez p^2, zatem liczba $2^{364} - 1$ nie jest bezkwadratowa.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 654 ($WT = 2{,}05$), 655 ($WT = 2{,}90$) z numeru 3/2018

Tomasz Wietecha	Tarnów	44+3,92
Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,20
Tomasz Rudny	Gliwice	39,04
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,85
Aleksander Surma	Myszków	20,28
Michał Koźlik	Poznań	19,20
Jan Zambrzycki	Białystok	17,37

Pan Tomasz Wietecha po raz 13 przekroczył granicę 44 punktów. Gratulujemy!

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 755 ($WT = 1{,}91$) i 756 ($WT = 1{,}56$) z numeru 2/2018

Tomasz Choczewski	Szczecin	40,78
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,19
Michał Miodek	Warszawa	34,34
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,29
Paweł Kubit	Kraków	32,77
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Janusz Olszewski	Warszawa	32,15
Piotr Kumor	Olsztyn	31,69