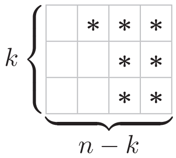
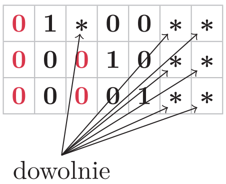
Otrzymaliśmy macierz zawierającą puste pola oraz pewne liczby. Tak naprawdę nie interesuje nas, jakie to są liczby, więc możemy każdą z nich zastąpić gwiazdką.



Czyli mamy diagram o wymiarach k na $n-k$. Oznaczmy pojedynczy diagram przez λ, a liczbę gwiazdek w nim przez $|\lambda|$. Zauważmy, że z diagramu λ możemy „odzyskać” postać macierzy, z której powstał. Kolumny z jedynkami wiodącymi wstawiamy w sposób jednoznaczny, podobnie jak zera po ich lewej stronie. Natomiast gwiazdki możemy zastąpić elementami ciała F na wszystkie możliwe sposoby, których jest dokładnie $q^{|\lambda|}$



I tak oto dochodzimy do wniosku, że różnych zredukowanych macierzy schodkowych, a więc również podprzestrzeni k-wymiarowych przestrzeni n-wymiarowej jest:

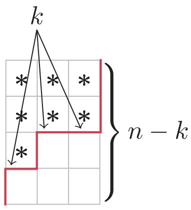
$$(**)\qquad \binom{n}{k}_q = \sum_{\lambda\subset k\times(n-k)} q^{|\lambda|},$$

gdzie zapis $\lambda \subset k \times (n-k)$ oznacza, że diagram λ „mieści” się w macierzy o k wierszach i $n-k$ kolumnach. Z powyższej formuły widać ponadto, że $\binom{n}{k}_q$ wyraża się zawsze jako wielomian stopnia $(n-k)k$ zmiennej q o całkowitych dodatnich współczynnikach. To nie było od razu widoczne z formuły $(\star)$, gdyż na pozór nie wydaje się, aby występujący tam ułamek mógł zostać skrócony. Warto również podkreślić, że równość pomiędzy prawymi stronami równań $(\star)$ i $(**)$ zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej q; na mocy naszych rozważań jest bowiem prawdziwa dla dowolnego q będącego licznością pewnego ciała skończonego (w szczególności dla liczb pierwszych), a jeśli funkcje wymierne (tzn. ilorazy wielomianów) przyjmują te same wartości dla nieskończenie wielu argumentów, to są równe wszędzie tam, gdzie są określone.

Pozostało nam jeszcze policzyć, ile jest różnych diagramów o $|\lambda|$ gwiazdkach. Jeżeli przyjrzymy się dokładnie pojedynczemu diagramowi i obrócimy go o 90°, to zobaczymy, że w istocie jest on tym samym, co tak zwany *diagram Ferrersa* (znany matematykom od dawna i dokładnie zbadany).

Diagramy Ferrersa reprezentują podziały liczby naturalnej na skończoną liczbę dodatnich składników, przy czym ich kolejność jest nieistotna. Zliczanie takich diagramów jest równoważne zliczaniu różnych podziałów.

Łatwo policzyć, ile jest takich diagramów. Możemy każdy z nich utożsamić z linią łamaną stanowiącą jego prawostronny obrys (na rysunku diagram Ferrersa dla $n=7$ i $k=3$). Żeby otrzymać taką linię, złożoną z n kresek, musimy wybrać dokładnie k miejsc, na których postawimy kreski poziome, a możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Dzięki temu, że policzyliśmy, ile jest różnych diagramów o mocy $|\lambda|$, możemy ponownie stwierdzić słuszność interesującej nas zależności; wystarczy zauważyć, że dla $q=1$ prawa strona $(**)$ jest liczbą wszystkich możliwych diagramów Ferrersa, czyli wynosi $\binom{n}{k}$.



Zagnieżdżone pierwiastki

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

W 1911 roku Srinivasa Ramanujan (1887–1920) zaproponował czytelnikom *Journal of the Indian Mathematical Society* (JIMS 3 (1911), Question 289, p. 90) wyznaczenie wartości:

$$\text{(a)}\ \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}},\qquad \text{(b)}\ \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\cdots}}}.$$

Ponieważ pytania te w 1911 r. nie doczekały się odpowiedzi, więc Ramanujan podał je w kolejnym tomie JIMS 4 (1912), p. 226. Zadania Ramanujana można rozwiązać prosto i elegancko.

(a) Zauważmy, że

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)},\quad n = 1, 2, \ldots.$$

Niech $f(n) = n(n+2)$, wtedy

$$f(n) = n\sqrt{1+f(n+1)} = n\sqrt{1+(n+1)f(n+2)} = \ldots,$$

zatem

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+\cdots}}}.$$

O innych wzorach Ramanujana pisaliśmy w Δ^3_{18}.

Przyjmując $n=1$, mamy odpowiedź,

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=3.\ \blacksquare$$

(b) Działa podobny *trick*: $n(n+3)=n\sqrt{(n+5)+(n+1)(n+4)}$. Niech $f(n)=n(n+3)$, wówczas

$$f(n)=n\sqrt{(n+5)+f(n+1)}=$$
$$=n\sqrt{(n+5)+(n+1)\sqrt{(n+6)+f(n+2)}}=\ldots,$$

więc

$$n(n+3)=n\sqrt{(n+5)+(n+1)\sqrt{(n+6)+(n+2)\sqrt{(n+7)+\ldots}}}.$$

Przyjmując $n=1$, otrzymujemy

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\cdots}}}}=4.\ \blacksquare$$

Przypadek (a) stał się treścią zadania 578 w „Klubie 44” (*Delta* 3/2009), a jego „siłowe” rozwiązanie jest w *Delcie* 7/2009, patrz też *Delta* 2/2010. Wcześniej, w 1966 r., pojawił się on jako zadanie podczas *The William Lowell Putnam Competition*.

Oczywiście Ramanujan wiedział więcej, np. odkrył wzór

$$(*)\qquad x+n+a=\sqrt{ax+(n+a)^2+x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{\cdots}}},$$

gdzie $x,\ n,\ a$ są liczbami nieujemnymi.

Dowód. Ponieważ

$$x+n+a=\sqrt{ax+(n+a)^2+x(x+2n+a)},$$

więc przyjmując $f(x)=x+n+a$, otrzymujemy

$$f(x)=\sqrt{ax+(n+a)^2+x\cdot f(x+n)}=$$
$$=\sqrt{ax+(n+a)^2+x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\cdot f(x+2n)}}=\ldots$$

i w konsekwencji równość $(*)$. $\blacksquare$

Przyjmując w tożsamości $(*)$:

(i) $x=2$, $n=1$, $a=0$, otrzymamy rozwiązanie przypadku (a),

(ii) $x=2$, $n=1$, $a=1$, otrzymamy rozwiązanie przypadku (b),

(iii) $x=y\geqslant 0$, $n=0$, $a=1$, mamy

$$\sqrt{1+y+y\sqrt{1+y+y\sqrt{1+y+\ldots}}}=1+y,$$

w szczególności dla $y=1$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2\ .$$

(iv) $x=y\geqslant 0$, $n=a=0$, mamy

$$\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\ldots}}}}=y,$$

w szczególności dla $y=2$,

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots=2.$$

(v) $x=y\geqslant 0$, $n=1$, $a=0$, mamy

$$\sqrt{1+y\sqrt{1+(1+y)\sqrt{1+(2+y)\sqrt{1+\ldots}}}}=1+y,$$

w szczególności dla $y=1$,

$$\sqrt{1+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots}}}}=2,$$

(vi) $x=2$, $n=0$, $a=\sqrt{1+y}-1$, mamy

$$\sqrt{y+2\sqrt{y+2\sqrt{y+2\sqrt{y+\ldots}}}}=1+\sqrt{1+y},\ \text{gdzie } y\geqslant 0,$$

(vii) $x=1$, $n=0$, $a=\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}$, mamy

$$\sqrt{y+\sqrt{y+\sqrt{y+\sqrt{y+\ldots}}}}=\frac{\sqrt{1+4y}+1}{2},\ \text{dla } y>0.$$

Takich wzorów-schematów Ramanujan podał bardzo, bardzo dużo. Może niektóre z nich warto poznać i zrozumieć, choć Ramanujan nie widział potrzeby ich uzasadniania, po prostu wiedział, że są prawdziwe!