Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2018

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

757. Funkcje $f, g\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ są określone wzorami
$$f(k) = \max\{1,\ k-1\}, \qquad g(k) = \min\{n,\ k+1\}.$$
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ ustalić, ile jest funkcji $h\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, dających się wyrazić jako złożenia skończenie wielu odwzorowań, z których każde jest jedną z funkcji f, g. [Dopuszczamy również złożenie puste (zero egzemplarzy funkcji f, g), przyjmując zwykłą umowę, że daje ono w wyniku odwzorowanie tożsamościowe $h(k) = k$.]

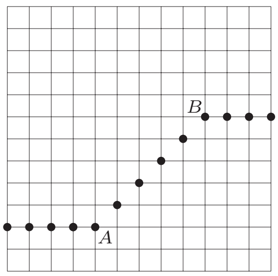
758. Trzy okręgi o promieniach r_1, r_2, r_3 są parami styczne zewnętrznie oraz są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu R. Wykazać, że
$$r_1 + r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1} \leqslant 3R.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 751 ($WT = 3{,}77$) i 752 ($WT = 1{,}26$) z numeru 12/2017

Marcin Kasperski	Warszawa	45,09
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	36,09
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Michał Miodek	Warszawa	31,56

Nie tak wielu Weteranów przekroczyło *44* więcej niż trzy razy (do tej pory – dwudziestka). Marcin Kasperski oto dołączył do ich grona.

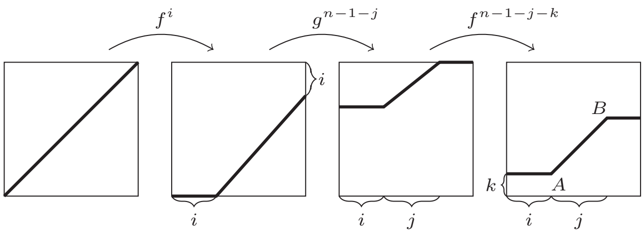
757. Funkcja jest reprezentowana przez jej wykres – w tym przypadku układ n kropek na „planszy"
$$K = \{(x,y)\colon\ \ 1 \leqslant x \leqslant n,\ \ 1 \leqslant y \leqslant n;\quad x, y \in \mathbb{N}\}$$
(to zbiór punktów kratowych w kwadracie $[1,n] \times [1,n]$), po jednej kropce na każdej linii pionowej. Stosując do takiego układu funkcję f, uzyskujemy przesunięcie wszystkich kropek o jednostkę w dół, z wyjątkiem tych, które już były na dolnej krawędzi; one nie zmieniają położenia. Działanie funkcji g jest podobne (ruch w górę; blokada na górnej krawędzi).



Rys. 1

Niech A, B będą dwoma różnymi punktami zbioru K takimi, że odcinek AB jest równoległy do przekątnej kwadratu, przy czym punkt B leży na prawo i w górę od A. Dla takiej pary punktów niech h_{AB} oznacza funkcję, której wykres składa się z punktów kratowych, położonych na odcinku poziomym od lewego skraja planszy do A, na odcinku AB, i na odcinku od B do prawego skraja planszy (rysunek 1). Złożenie takiej funkcji z dowolną z operacji f, g daje w wyniku znów funkcję takiej postaci lub funkcję stałą (o wykresie: wszystkie kropki na krawędzi górnej lub dolnej). Złożenie funkcji stałej z f lub g daje oczywiście także funkcję stałą.

Wniosek: startując od odwzorowania tożsamościowego i stosując skończenie wiele razy operacje f, g (w dowolnej kolejności) możemy uzyskać tylko funkcje typu h_{AB} oraz funkcje stałe. Co ważne, *każdą* taką funkcję da się w ten sposób uzyskać (przykładową ewolucję przedstawia rysunek 2).



Rys. 2

Pozostaje zliczyć funkcje h_{AB} – czyli możliwe pary punktów A, B – oraz doliczyć funkcje stałe. Punkty A, B mogą leżeć na przekątnej $x = y$ (przechodzącej przez n punktów kratowych), na jednej z dwóch linii $|x-y| = 1$ (po $n-1$ punktów kratowych), na jednej z dwóch linii $|x-y| = 2$ (po $n-2$ punktów kratowych), itd. Liczba możliwych do uzyskania funkcji (więc n funkcji stałych oraz wszystkich funkcji h_{AB}) wynosi zatem
$$n + \binom{n}{2} + 2\left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{2}{2}\right] =$$
$$= n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = \frac{n(2n^2 - 3n + 7)}{6}.$$

758. Oznaczmy (kolejno) przez S_1, S_2, S_3 środki tych trzech okręgów, a środek dużego okręgu przez O. Zgodnie z warunkami zadania,
$$(1)\quad |S_iS_j| = r_i + r_j,\ \ |OS_i| = R - r_i \ \text{dla}\ \ i, j \in \{1,2,3\}.$$
Niech P będzie środkiem ciężkości trójkąta $S_1S_2S_3$. Jest to punkt minimalizujący sumę kwadratów odległości od wierzchołków (znany fakt, zresztą łatwy do wykazania). Zatem
$$(2)\qquad \sum |OS_i|^2 \geqslant \sum |PS_i|^2 = \sum\Big(\frac{2}{3}\,m_i\Big)^2$$
(sumy po $i = 1,2,3$),

gdzie m_i jest długością środkowej, wychodzącej z wierzchołka S_i. Suma kwadratów długości środkowych to $3/4$ sumy kwadratów długości boków (kolejny znany wzór). Nierówność (2) pokazuje więc, że
$$3\sum |OS_i|^2 \geqslant \frac{4}{3}\sum m_i^2 = \sum |S_iS_{i+1}|^2.$$
Wprowadzamy dane (1) i przekształcamy uzyskaną nierówność:
$$3\sum (R - r_i)^2 \geqslant \sum (r_i + r_{i+1})^2;$$
$$9R^2 - 6R\sum r_i + 3\sum r_i^2 \geqslant 2\sum r_i^2 + 2\sum r_ir_{i+1};$$
$$9R^2 - 6R\sum r_i + \Big(\sum r_i\Big)^2 \geqslant 4\sum r_ir_{i+1};$$
$$\Big(3R - \sum r_i\Big)^2 \geqslant 4\sum r_ir_{i+1}.$$
Różnica w nawiasie jest dodatnia. Pierwiastkując stronami ostatnią nierówność, dostajemy tezę zadania.