Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2018

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 749 ($WT = 3{,}05$) i 750 ($WT = 1{,}49$) z numeru 11/2017

Roksana Słowik	Knurów	44,30
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	34.83
Michał Koźlik	Gliwice	32,23

Niewiele Pań bierze udział w naszej Lidze – co zauważamy z nieukrywanym żalem. Od startu Ligi tylko pięć uczestniczek przekroczyło próg 44 p. Pani Roksana Słowik jest jedyną, która tę barierę pokonała dwukrotnie!

Zadania z matematyki nr 763, 764

Redaguje Marcin E. KUCZMA

763. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia 2, o współczynnikach rzeczywistych, oraz liczba naturalna $n \geqslant 1$. Udowodnić, że może istnieć co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n, spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$.

764. Czy istnieją liczby naturalne $a, b \geqslant 1$, względnie pierwsze i takie, że wzór rekurencyjny

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = b + \prod_{k=1}^{n} x_k$$

generuje ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$, którego wszystkie wyrazy są liczbami złożonymi?

Zadanie 764 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2018

Przypominamy treść zadań:

755. Niech $P(x)$ będzie takim wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) + P''(x) \geqslant 2P'(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dowieść, że $P(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wykazać, że dla każdego układu dodatnich liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Scharakteryzować (dla ustalonego n) te układy $a_1, \ldots, a_n$ (dodatnich liczb całkowitych), dla których napisana nierówność staje się równością.

755. Gdy $P(x)$ jest funkcją stałą, implikacja jest oczywista. Dalej przyjmijmy, że P jest wielomianem stopnia dodatniego. Wielomian $P - 2P' + P''$ ma taki sam stopień, a przy tym przyjmuje – zgodnie z założeniem – wyłącznie wartości nieujemne. Jest to więc wielomian stopnia parzystego. Ten sam stopień ma zarówno wielomian P, jak i wielomian $Q(x) = P(x) - P'(x)$. Każdy z tych wielomianów, jako funkcja ciągła zmiennej rzeczywistej, mająca granicę ∞ przy $|x| \to \infty$, przyjmuje w pewnym punkcie osi liczbowej swoją wartość minimalną. Niech więc

$$\min_{x\in\mathbb{R}} P(x) = P(a), \qquad \min_{x\in\mathbb{R}} Q(x) = Q(b); \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

W punkcie, realizującym minimum, pochodna jest równa zeru: $P'(a) = 0$, $Q'(b) = 0$. Zauważmy, że, w myśl założenia zadania,

$$Q(x) - Q'(x) = \big(P(x) - P'(x)\big) - \big(P'(x) - P''(x)\big) \geqslant 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $x = b$ dostajemy $Q(b) \geqslant 0$. Jest to wartość minimalna wielomianu Q, zatem

$$Q(x) = P(x) - P'(x) \geqslant 0 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawiamy $x = a$ i mamy $P(a) \geqslant 0$. To wartość minimalna wielomianu P. Zatem $P(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Przyjmijmy oznaczenia: $m = \mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n)$, $M = \mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_n)$, $P = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Wystarczy wykazać, że każda liczba pierwsza, która dzieli iloczyn mM, wchodzi do iloczynu P w co najmniej takiej samej potędze. Niech więc p będzie liczbą pierwszą i niech (dla $i = 1, \ldots, n$) k_i będzie takim wykładnikiem, że $p^{k_i} \| a_i$ (ten napis oznacza, że a_i dzieli się przez p^{k_i}, ale nie przez p^{k_i+1}). Wówczas $p^{\alpha} \| m$, $p^{\beta} \| M$, gdzie $\alpha = \min\{k_1, \ldots, k_n\}$, $\beta = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, i wobec tego $p^{\alpha+\beta} \| mM$. Oczywiście $p^{k_1+\ldots+k_n} \| P$. Porównanie wykładników nie pozostawia wątpliwości:

$$(1) \qquad \min\{k_1, \ldots, k_n\} + \max\{k_1, \ldots, k_n\} \leqslant k_1 + \ldots + k_n.$$

Wobec dowolności wyboru p, uzasadnia to zadaną nierówność $mM \leqslant P$.

Kiedy zachodzi równość $mM = P$? Wtedy, gdy każda liczba pierwsza dzieli mM w dokładnie tej samej potędze, w jakiej dzieli P. Czyli gdy dla każdej liczby pierwszej p nierówność (1) (z wykładnikami k_i, wyznaczonymi przez p) staje się równością.

Dla $n = 2$ jest tak zawsze; dostajemy znaną tożsamość: $\mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(a, b) = ab$.

Dla $n \geqslant 3$ równość w relacji (1) oznacza, że gdy po jej prawej stronie usuniemy jeden największy i jeden najmniejszy składnik, pozostaną jakieś nieskreślone składniki, o zerowej sumie – czyli wszystkie równe zeru. Składnik najmniejszy automatycznie także jest zerem. Tylko jeden składnik po prawej stronie (1) może być dodatni. To znaczy, że tylko jedna z liczb $a_1, \ldots, a_n$ może dzielić się przez p. Wobec dowolności p, znaczy to, że liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami względnie pierwsze.

I na odwrót, gdy tak jest, wówczas dla każdej liczby pierwszej p mamy w ciągu $(k_1, \ldots, k_n)$ co najwyżej jeden wyraz niezerowy; nierówńść (1) przechodzi w równość, i w konsekwencji $mM = P$.

Podsumowując: dla $n \geqslant 3$, równość $mM = P$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami względnie pierwsze; dla $n = 2$, ta równość jest tożsamością.