Zadania z matematyki nr 761, 762

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2018

761. Trójkąt ABC (nie prostokątny) jest wpisany w okrąg o średnicy AD. Punkt E jest symetryczny do A względem środka boku BC. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i BDE mają równe promienie.

762. Rozważamy liczby naturalne $n \geqslant 2$.
(a) Udowodnić, że jeśli liczba $2^n - 1$ jest bezkwadratowa, to liczby n oraz $2^n - 1$ są względnie pierwsze.
(b) Wykazać, że nie zachodzi implikacja odwrotna.

Zadanie 762 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2018

Przypominamy treść zadań:

753. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt D. Proste AD i BD przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że jeśli $|AE| + |AF| = |BE| + |BF|$, to $|AC| + |AD| = |BC| + |BD|$.

754. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant 0$, spełniające układ równań

$$x + y + z = 1, \qquad 9(xy + yz + zx) = 2 + 9(x^3 + y^3 + z^3).$$

753. Weźmy pod uwagę okrąg ω, dopisany do trójkąta ADF przy boku AD, styczny do tego boku w punkcie X, oraz okrąg ω', dopisany do trójkąta BDE przy boku BD, styczny do prostej ED w punkcie X'. Wzory, wyrażające długości odcinków stycznych, są dobrze znane (lub/oraz łatwe do uzasadnienia):

$$2 \cdot |DX| = |AF| + |AD| - |DF|,$$
$$2 \cdot |DX'| = |BE| + |BD| - |DE|.$$

Odejmujemy stronami:

$$2 \cdot |DX| - 2 \cdot |DX'| = |AF| - |BE| + |AD| + |DE| - |BD| - |DF| = \\ = |AF| - |BE| + |AE| - |BF|.$$

To wyrażenie ma wartość 0, w myśl założenia zadania. Stąd wniosek, że punkty X i X' pokrywają się; to zaś oznacza, że ω i ω' to ten sam okrąg, styczny do prostych AC, BC, AE, BF (kolejno) w punktach U, V, $X\ (=X')$, Y. Z położenia tych punktów na odpowiednich prostych wynikają równości

$$|AC| + |AD| = |CU| - |AU| + |AX| + |DX| = |CU| + |DX|,$$
$$|BC| + |BD| = |CV| - |BV| + |BY| + |DY| = |CV| + |DY|.$$

Sumy, uzyskane po prawych stronach, są równe, bo $|CU| = |CV|$, $|DX| = |DY|$. Stąd równość sum po lewych stronach – czyli teza zadania.

754. Niech x, y, z będą liczbami nieujemnymi, spełniającymi podany układ równań. Ich suma, więc i jej kwadrat, wynosi 1; wobec tego

$$xy + yz + zx = \frac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}.$$

Wstawiając to do drugiego równania układu, po prostym przekształceniu dostajemy równanie

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{5}{9}. \tag{1}$$

Funkcja $f(t) = 2t^3 + t^2$ jest ściśle wypukła w przedziale $[0, \infty)$, zatem spełnia nierówność Jensena

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqslant 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}. \tag{2}$$

Równanie (1) oznacza, że (dla rozważanych liczb x, y, z) nierówność (2) staje się równością, co ma miejsce jedynie, gdy te liczby są równe. Ich suma jest jedynką, więc $x = y = z = 1/3$; ta trójka liczb spełnia oba równania układu i stanowi jego jedyne rozwiązanie.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
644 ($WT = 2{,}63$), 645 ($WT = 3{,}1$)
z numeru 10/2017

Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,86
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	28,03

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
747 ($WT = 2{,}24$) i 748 ($WT = 1{,}64$)
z numeru 10/2017

Adam Dzedzej	Gdańsk	47,10
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Roksana Słowik	Knurów	43,26
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Michał Koźlik	Gliwice	32,23

Pan Adam Dzedzej mija metę po raz trzeci i zostaje trzydziestym siódmym Weteranem Klubu 44 M.