Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2018

Zadania z matematyki nr 759, 760

Redaguje Marcin E. KUCZMA

759. Ciąg nieskończony $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$; wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(3/2, 2)$. Wyznaczyć wszystkie liczby, będące granicami zbieżnych podciągów ciągu (x_n).

760. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których każda z liczb $x^{1/2} + x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3} + x^{-1/3}$ jest całkowita.

Zadanie 760 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

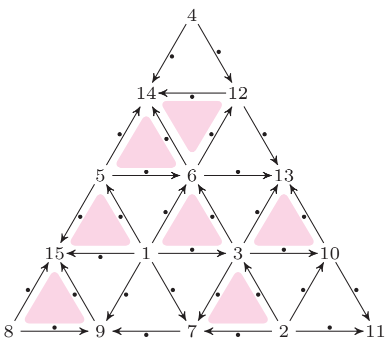
Rozwiązania zadań z numeru 12/2017

Przypominamy treść zadań:

751. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1 (trójkątów jednostkowych). Wierzchołkom powstałej siatki zostały przyporządkowane różne liczby rzeczywiste ($(n+1)(n+2)/2$ różnych liczb). Trójkąt jednostkowy nazwiemy zorientowanym dodatnio, jeśli – idąc wzdłuż jego brzegu, w kierunku wzrastania liczb przy wierzchołkach (tj. startując od najmniejszej i idąc przez średnią do największej) – mamy jego wnętrze po lewej stronie. Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć najmniejszą i największą wartość liczby trójkątów jednostkowych zorientowanych dodatnio.

752. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich, których średnia arytmetyczna i średnia geometryczna różnią się o 1.

751. Utworzona siatka składa się z $K = 3n(n+1)/2$ krawędzi i rozcina płaszczyznę na $T+1$ obszarów: $T = n^2$ trójkącików jednostkowych oraz składową nieograniczoną, nazywaną oceanem. Każdą krawędź traktujemy jako odcinek skierowany, od końca, oznaczonego liczbą mniejszą, do końca, oznaczonego liczbą większą. W pobliżu każdej krawędzi kładziemy marker na obszarze, który do niej przylega po stronie lewej (względem zwrotu strzałki).



Łącznie położyliśmy K markerów. Rysunek ilustruje sytuację, gdy $n = 4$ (więc $K = 30$, $T = 16$), wraz z przykładowym ponumerowaniem wierzchołków; kropki oznaczają markery; zacienione są trójkąciki zorientowane dodatnio (w sensie sprecyzowanym w treści zadania).

Na każdym trójkąciku zorientowanym dodatnio znalazły się dwa markery; na trójkąciku zorientowanym ujemnie – jeden marker. Więc jeśli mamy D trójkącików zorientowanych dodatnio, to w obrębie całego dużego trójkąta znalazło się $T + D$ markerów. Pozostałe, w liczbie $K - T - D$, są na oceanie.

Każdy marker na oceanie odpowiada krawędzi zorientowanej ujemnie względem wnętrza dużego trójkąta – czyli takiej, że obchodząc cały jego brzeg i mając jego wnętrze po lewej stronie, idziemy niezgodnie ze zwrotem strzałki (odnotowujemy spadek wartości przy wierzchołkach). Może być tylko jeden taki odcinek, mogą to też być wszystkie z wyjątkiem jednego (czyli $3n-1$). Dostajemy nierówności $1 \leqslant K - T - D \leqslant 3n - 1$; po podstawieniu $K = 3n(n+1)/2$, $T = n^2$ i prostym przekształceniu uzyskujemy dwustronne oszacowanie

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} \leqslant D \leqslant \frac{n^2 + 3n - 2}{2}.$$

Po obu stronach jest możliwa realizacja równości: wystarczy oznaczyć wierzchołki siatki, leżące na brzegu dużego trójkąta, liczbami tworzącymi ciąg monotoniczny (po wystartowaniu z dowolnie wybranego wierzchołka oraz ustaleniu kierunku obchodzenia), z jedynym zakłóceniem monotoniczności przy zamknięciu cyklu. Liczby po obu stronach napisanej nierówności stanowią odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu. [Warto zauważyć, że liczby, przyporządkowane wierzchołkom wewnętrznym, nie mają już dla wartości D żadnego znaczenia].

752. Niech a, b będą liczbami naturalnymi, spełniającymi warunek $\sqrt{ab} + 1 = (a+b)/2$. Wymierny pierwiastek z liczby naturalnej jest liczbą naturalną. Zatem ab musi być kwadratem liczby naturalnej. Oznaczając przez d największy wspólny dzielnik liczb a, b (tak, że $a = a'd$, $b = b'd$; a', b' względnie pierwsze) widzimy, że czynniki a', b' muszą być kwadratami: $a = x^2d$, $b = y^2d$ (x, y naturalne). Badane równanie przybiera postać $dxy + 1 = (x^2d + y^2d)/2$; po przekształceniu: $d(x-y)^2 = 2$. Stąd wniosek, że $d = 2$, $|x - y| = 1$.

Uzyskaliśmy odpowiedź: liczby a, b to podwojone kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych. Proste sprawdzenie pokazuje, że każda taka para spełnia wymagany warunek.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 642 ($WT = 2{,}2$), 643 ($WT = 2{,}2$) z numeru 9/2017

Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,89
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,30

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 745 ($WT = 2{,}25$) i 746 ($WT = 1{,}75$) z numeru 9/2017

Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Adam Dzedzej	Gdańsk	43,22
Roksana Słowik	Knurów	41,91
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71