Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

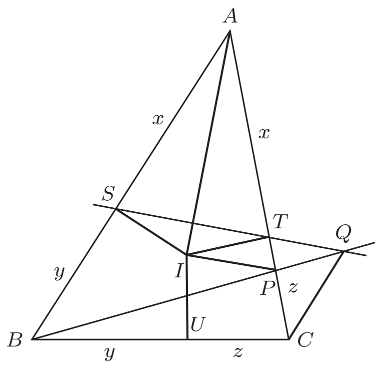
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2018

Zadania z matematyki nr 757, 758

Redaguje Marcin E. KUCZMA

757. Funkcje $f, g\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ są określone wzorami
$$f(k) = \max\{1,\ k-1\}, \qquad g(k) = \min\{n,\ k+1\}.$$
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ ustalić, ile jest funkcji $h\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, dających się wyrazić jako złożenia skończenie wielu odwzorowań, z których każde jest jedną z funkcji f, g. [Dopuszczamy również złożenie puste (zero egzemplarzy funkcji f, g), przyjmując zwykłą umowę, że daje ono w wyniku odwzorowanie tożsamościowe $h(k) = k$.]

758. Trzy okręgi o promieniach r_1, r_2, r_3 są parami styczne zewnętrznie oraz są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu R. Wykazać, że
$$r_1 + r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1} \leqslant 3R.$$
Zadanie 758 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.



Rozwiązania zadań z numeru 11/2017

Przypominamy treść zadań:

749. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I, stycznym do boków AB i AC w punktach S i T. Na boku AC leży taki punkt P, że $IP \| ST$. Proste ST i BP przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $QC \| AB$.

750. Znaleźć wszystkie pary liczb pierwszych p, q $(p > q)$, dla których także liczby $(p^2+q^2)/2$ oraz $(p^2-q^2)/24$ są pierwsze.

749. Oznaczmy przez U punkt styczności boku BC z okręgiem wpisanym (rys.) i niech
$$x = |AS| = |AT|, \quad y = |BS| = |BU|, \quad z = |CT| = |CU|,$$
$$r = |IS| = |IT| = |IU|, \quad s = x + y + z.$$
Zachodzi równość $xyz = r^2 s$ (znany fakt – lub nietrudne ćwiczenie).

Odcinek IT jest wysokością w trójkącie prostokątnym AIP; zatem $|PT| = r^2/x = yz/s$. Stąd
$$\frac{|AP|}{|PT|} = \frac{|AT| + |PT|}{|PT|} = 1 + \frac{|AT|}{|PT|} = 1 + \frac{sx}{yz} = $$
$$= \frac{yz + (x+y+z)x}{yz} = \frac{(x+y)(x+z)}{yz}.$$
Prosta BP przecina boki trójkąta AST (lub ich przedłużenia) w punktach Q, P, B więc w myśl wzoru Menelausa
$$\frac{|QS|}{|TQ|} = \frac{|AP|}{|PT|} \cdot \frac{|SB|}{|BA|} = \frac{(x+y)(x+z)}{yz} \cdot \frac{y}{x+y} = $$
$$= \frac{x+z}{z} = \frac{|AC|}{|CT|}.$$
Uzyskana proporcja implikuje równoległość prostych QC i AB (odwrócenie twierdzenie Talesa).

750. Przyjmijmy, że liczby p, q spełniają postawione warunki; w szczególności $p^2 - q^2 = 24r$, gdzie r jest liczbą pierwszą. Jasne, że $q \neq 2$, $q \neq 3$. Iloczyn liczb naturalnych $(p+q)/2$ i $(p-q)/2$ wynosi $6r$, więc jedna z nich dzieli się przez r. W takim razie druga jest dzielnikiem liczby 6; wobec czego mniejsza z nich nie przekracza 6. Dostajemy oszacowanie $p - q \leqslant 12$.

Jeżeli $q = 5$, to $p \leqslant 17$, czyli $p \in \{7, 11, 13, 17\}$. Sprawdzamy, że tylko para $(p,q) = (17,5)$ jest dobra.

Dalej przyjmujemy, że $p > q > 5$. Wówczas $p^4 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{5}$, więc
$$(p^2-q^2)(p^2+q^2) \equiv 0 \pmod{5}.$$
To pokazuje, że iloczyn liczb całkowitych $r = (p^2-q^2)/24$ oraz $s = (p^2+q^2)/2$ dzieli się przez 5. Są to z założenia liczby pierwsze, więc któraś z nich jest równa 5. Ale $2s = p^2 + q^2 \geqslant 11^2 + 7^2$. Pozostaje możliwość $r = 5$.

Iloczyn liczb naturalnych $(p+q)/2$ i $(p-q)/2$ wynosi $6r = 30$. Cztery możliwe rozkłady $(30 \cdot 1,\ 15 \cdot 2,\ 10 \cdot 3,\ 6 \cdot 5)$ dają pary (p,q), odpowiednio, $(31,29)$, $(17,13)$, $(13,7)$, $(11,1)$. Ostatnia odpada. Dla $p = 31$, $q = 29$ wychodzi $s = 901$, liczba złożona. Pozostałe dwie pary są już dobre. Wraz z parą znalezioną wcześniej, ostatecznie otrzymujemy trzy rozwiązania. Wypiszemy je, podając również wartości r i s:

p	q	r	s
17	5	11	157
17	13	5	229
13	7	5	109