Z notatnika geniusza

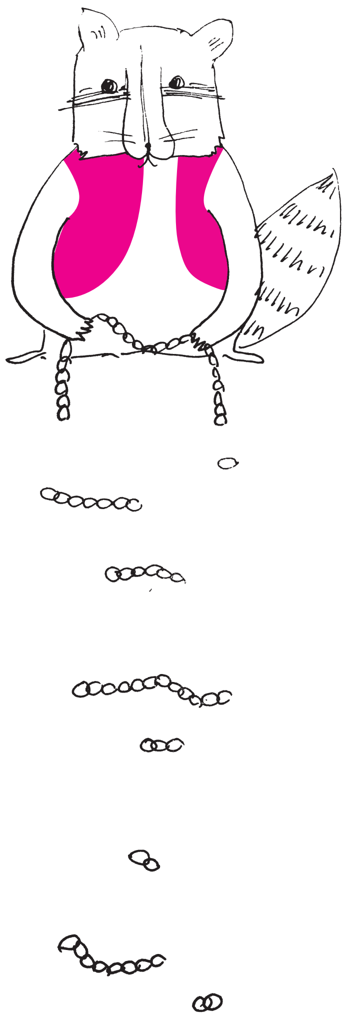
*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Srinivasa Ramanujan Ijengar (1887–1920) był indyjskim matematykiem z prowincji Madras, genialnym samoukiem obdarzonym niezwykłym talentem do odkrywania zaskakujących zależności liczbowych. Swobodnie posługiwał się ułamkami łańcuchowymi, szeregami liczbowymi, funkcjami eliptycznymi. Pozostawił około 3900 wzorów, z których jedynie niewielka część została dotychczas sprawdzona.

Część 1. Dla odważnych

Wgląd w nadzwyczajne zdolności i wyobraźnię Ramanujana daje lektura fragmentu jego listu wysłanego z Madrasu 16 stycznia 1913 r. do angielskiego matematyka Godfreya Harolda Hardy'ego (1877–1947). List zawierał około 120 wzorów matematycznych bez wyjaśnień i komentarzy. Kilkanaście z nich Hardy uznał za reprezentatywne [2] (każdy może zmierzyć się z ich uzasadnieniem).



(1) $$1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4+\ldots = \left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right)$$

(2) $$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}$$

(3) $$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}\cdot\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2}$$

(4) $$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^4}$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{1+(\frac{x}{b+1})^2}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot\frac{1+(\frac{x}{b+2})^2}{1+(\frac{x}{a+1})^2}\cdot\ldots\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b+\frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)},\qquad \left[0<a<b+\tfrac{1}{2}\right]$$

(6) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\ldots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\ldots)}$$

(7) jeżeli $\alpha\cdot\beta=\pi^2$, to
$$\alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)=\beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)$$

(8) $$\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\ldots}}}}}=$$
$$\underset{\text{ozn.}}{=}\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-a^2}}{2a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{2}{2a+}\,\frac{3}{a+}\,\frac{4}{2a+\ldots}.$$

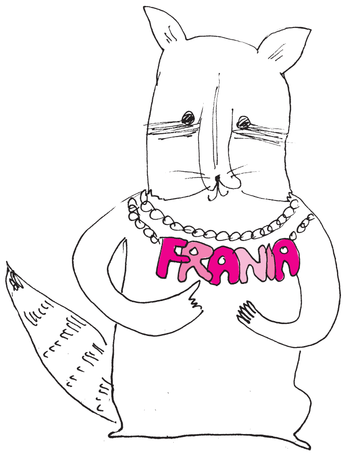
(9) $$4\int_0^\infty\frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx=\frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+\ldots}.$$

(10) jeżeli $u=\frac{x}{1+}\,\frac{x^5}{1+}\,\frac{x^{10}}{1+}\,\frac{x^{15}}{1+\ldots}$ i $v=\frac{\sqrt[5]{x}}{1+}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\ldots}$,

to $$v^5=u\cdot\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}$$

$$\textbf{(11)}\quad \frac{1}{1+}\ \frac{e^{-2\pi}}{1+}\ \frac{e^{-4\pi}}{1+\ldots} = \left\{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}\cdot e^{\frac{2\pi}{5}}$$

$$\textbf{(12)}\quad \frac{1}{1+}\ \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\ \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]\cdot e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$$



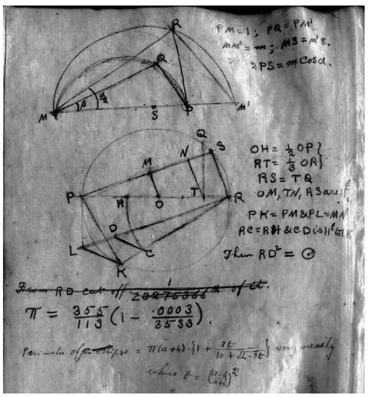
Wzory (1)–(4) okazały się przykładami szeregów hipergeometrycznych, których badanie zapoczątkowali Euler i Gauss. Wzory (5) i (6) wydały się Hardy'emu najmniej efektowne. Wykazał ich słuszność, choć miał z tym większy kłopot, niż się spodziewał. We wzorach (7)–(9) Hardy rozpoznał równości znane sobie i swoim współpracownikom. Natomiast wzory (10)–(12) Hardy uznał za bardzo zagadkowe i trudne do uzasadnienia. Pisał o nich „zupełnie mnie pokonały; nigdy wcześniej nie widziałem czegoś choćby podobnego. Wystarczyło jedno spojrzenie, by się zorientować, że zostały napisane przez matematyka najwyższej klasy", i dodał „muszą być prawdziwe, bo nikt nie miałby tyle wyobraźni, żeby je wymyślić". Prawdziwość wzorów (10)–(12) potwierdzili wiele lat później L.J. Rogers (1921) i G.N. Watson (1929).

W lutym 1913 r., wspierając się opinią J.E. Littlewooda, Hardy zyskał pewność – Ramanujan jest matematycznym geniuszem!

Część 2. Dla ciekawych

W 1914 r. Ramanujan, zgodnie ze swoim zwyczajem, podał bez uzasadnienia wzór
$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390\cdot k)}{(k!)^4\cdot 396^{4k}}.$$
Wzór okazał się prawdziwy i zapoczątkował prace nad ciągami szybko zbieżnymi do wartości π (patrz [1]).

Najcenniejszym efektem współpracy Hardy'ego i Ramanujana, podczas jego pobytu w Trinity College w Cambridge, jest wzór z 1918 r. na przybliżoną wartość funkcji rozkładu $p(n)$ (patrz [2]). Liczba $p(n)$ określa, na ile sposobów można przedstawić liczbę naturalną w postaci różnych sum liczb naturalnych. Ponieważ
$$4 = 4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 2+2 = 3+1,$$
więc $p(4) = 5$. Możemy sprawdzić, że $p(10) = 42$ i $p(n)$ szybko rośnie wraz ze wzrostem n. Nikt nie miał jednak pomysłu na oszacowanie wartości funkcji $p(n)$. Hardy i Ramanujan wykazali zaskakującą zależność
$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}\cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}},$$
co oznacza, że stosunek prawej i lewej strony dąży do 1, gdy $n\to\infty$. Liczba π była bohaterką wielu rozważań Ramanujana. Przed 1913 r., korzystając jedynie z twierdzenia Talesa i twierdzenia Pitagorasa, Ramanujan podał zaskakująco dokładne przybliżone rozwiązania kwadratury koła [3] i rektyfikacji okręgu [4].

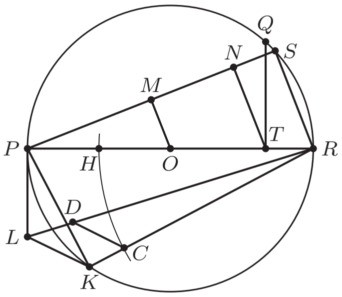


Strona 54 z „Manuscript Book 1 of Srinivasa Ramanujan".

Konstrukcja 1 (Kwadratura koła według Ramanujana)

Pomysł uwidoczniony jest na 54 stronie zachowanych rękopisów Ramanujana, „Manuscript Book 1 of Srinivasa Ramanujan".

Niech PR będzie średnicą okręgu jednostkowego o środku w punkcie O (rys. 1). Niech H połowi odcinek OP, a odcinek RT ma długość $\frac{1}{3}$. Kreślimy odcinek $TQ\perp PR$, i odkładamy taką cięciwę RS, że $|RS| = |TQ| = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Odcinek PS ma długość $\frac{\sqrt{31}}{3}$. Kreślimy odcinki $TN\|OM\|RS$ i obliczamy $|PM| = \frac{1}{2}|PS| = \frac{\sqrt{31}}{6}$, $|MN| = \frac{\sqrt{31}}{9}$. Rysujemy cięciwę PK o długości $|PK| = |PM|$ i w punkcie P wystawiamy styczną do okręgu PL. Mamy $|PL| = |MN| = \frac{\sqrt{31}}{9}$. Na boku RK o długości $\frac{\sqrt{113}}{6}$ odkładamy taki odcinek RC, że $|RC| = |RH| = \frac{3}{2}$, a następnie rysujemy odcinek $CD\|KL$.



Rys. 1

Z twierdzenia Talesa, $\frac{|RC|}{|RK|} = \frac{|RD|}{|RL|}$, więc $|RD| = \sqrt{\frac{355}{113}}$. Wówczas kwadrat o boku RD ma pole bliskie polu koła jednostkowego,

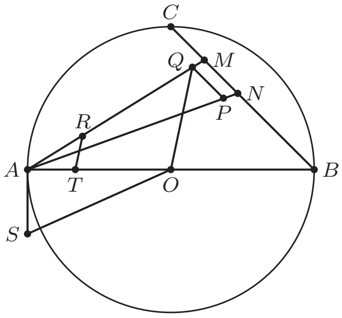
$$|RD|^2 = \frac{355}{113} \approx \mathbf{3{,}1415929}203\ldots,$$

jest przybliżeniem liczby π z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku.

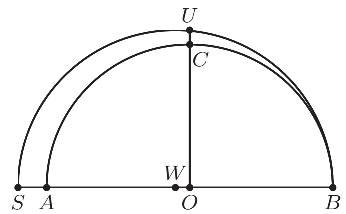
Ramanujan w swoich obliczeniach korzystał (co widać na reprodukcji) z lepszego przybliżenia liczby π w postaci $\frac{355}{113}\big(1 - \frac{0{,}0003}{3533}\big)$, które jest dokładne do czternastego miejsca po przecinku.

Ułamek $\frac{355}{113}$ jako przybliżenie wartości π został wskazany już w V wieku przez chińskiego astronoma Tsu Ch'ung-chih (430–501). Tysiąc lat później, w 1573 roku ponownie odkrył to przybliżenie Valentinus Otho (1545–1603) oraz w 1585 roku holenderski matematyk Adriaen Anthonisz (1527–1607).

Konstrukcja 2 (Rektyfikacja okręgu według Ramanujana)



Rys. 2



Rys. 3

Niech AB będzie średnicą okręgu jednostkowego o środku w punkcie O. Niech punkt C dzieli łuk ACB na połowę i odcinek AT ma długość $\frac{1}{3}$ (rys. 2). Na odcinku BC odkładamy odcinki $|CM| = |MN| = \frac{1}{3}$. Łączymy punkty AM i AN, $|AM| = \frac{\sqrt{19}}{3}$, $|AN| = \frac{\sqrt{22}}{3}$, i na odcinku AN odkładamy taki odcinek AP, że $|AP| = |AM|$. Kreślimy odcinek $PQ \| NM$. Z twierdzenia Talesa uzyskujemy $\frac{|AQ|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|AN|}$, więc $|AQ| = \frac{19}{3\sqrt{22}}$. Łączymy O z Q i z punktu T prowadzimy równoległą do OQ, która przecina odcinek AM w punkcie R. Wówczas, $|AR| = \frac{1}{3}|AQ| = \frac{19}{9\sqrt{22}}$. W punkcie A kreślimy styczną do okręgu i odkładamy taki odcinek AS, że $|AS| = |AR| = \frac{19}{9\sqrt{22}}$. Wtedy odcinek OS ma długość $|OS| = \sqrt{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}}$. Średnia proporcjonalna (geometryczna) między odcinkami $|OS|$ i $|OB|$, czyli odcinek OU (rys. 3), jest równa w przybliżeniu szóstej części długości okręgu, gdyż

$$3\sqrt{1 \cdot \sqrt{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}}} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \mathbf{3{,}14159265}25826\ldots,$$

co jest przybliżeniem wartości π z dokładnością do ośmiu cyfr po przecinku.

Ułamek $\frac{2143}{22}$ otrzymamy, przyjmując przybliżenie $\pi^4 \approx 97,4(09)$.

Literatura

[1] J.M. Borwein, P.B. Borwein, D.H. Bailey: Ramanujan, modular equations, and approximations to pi or how to compute one billion digits of pi, *Amer. Math. Monthly* 96 (1989), 201–219.

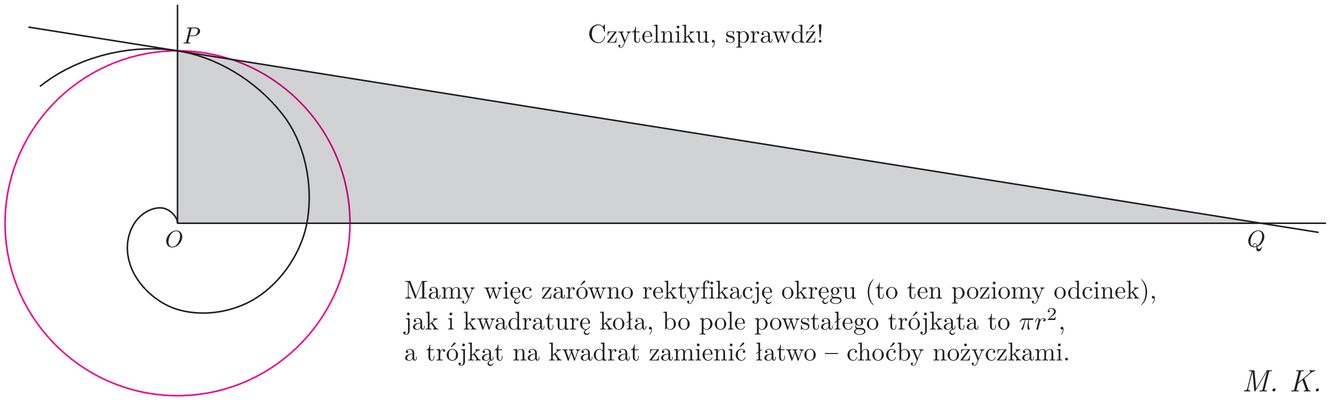
[2] G.H. Hardy: *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge Univ. Press, London 1940.

[3] S. Ramanujan: Squaring the circle, *J. Indian Math.* 5 (1913), 132.

[4] S. Ramanujan: Modular equations and approximations to pi, *Quart. J. Math.* 45 (1914), 350–372.

Zainteresowanym postacią Srinivasa Ramanujana polecamy książkę Roberta Kanigela *Człowiek który poznał nieskończoność*, której recenzję można znaleźć w Δ^9_{17}.

Archimedes rektyfikację okręgu i kwadraturę koła wykonał za pomocą swojej spirali, czyli krzywej opisanej w układzie biegunowym przez $r(\varphi) = a \cdot \varphi$. Jeśli odcinek OP, łączący punkt spirali odpowiadający 2π z jej początkiem, będzie miał długość r, to styczna do spirali w tym punkcie przetnie wychodzącą z O półprostą prostopadłą do OP w takim punkcie Q, że $|OQ| = 2\pi r$.



Czytelniku, sprawdź!

Mamy więc zarówno rektyfikację okręgu (to ten poziomy odcinek), jak i kwadraturę koła, bo pole powstałego trójkąta to πr^2, a trójkąt na kwadrat zamienić łatwo – choćby nożyczkami.

M. K.