Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2018

Zadania z matematyki nr 753, 754

Redaguje Marcin E. KUCZMA

753. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt D. Proste AD i BD przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że jeśli $|AE|+|AF|=|BE|+|BF|$, to $|AC|+|AD|=|BC|+|BD|$.

754. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych $x,y,z\geqslant 0$, spełniające układ równań

$$x+y+z=1, \qquad 9(xy+yz+zx)=2+9(x^3+y^3+z^3).$$

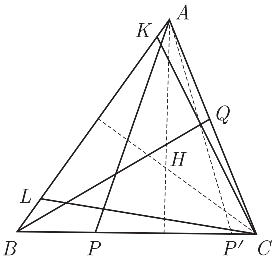
Zadanie 754 zaproponował pan Mikołaj Pater.

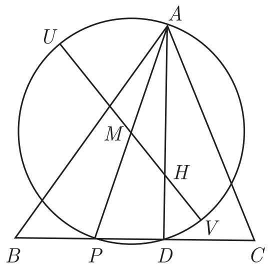
Rozwiązania zadań z numeru 9/2017

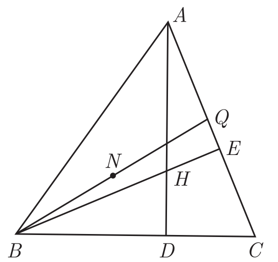
Przypominamy treść zadań:

745. Na obwodzie trójkąta ABC leżą punkty K,L,P,Q: punkty K, L na boku AB, punkty P i Q odpowiednio na bokach BC i CA; przy tym odcinki AP, BQ, CK i CL mają jednakową długość. Udowodnić, że środki tych czterech odcinków leżą na jednym okręgu.

746. Dana jest liczba naturalna $k\geqslant 2$. Czy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n), którego żaden wyraz ani żadna suma skończenie wielu jego wyrazów nie jest k-tą potęgą liczby naturalnej, a przy tym ciąg $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ jest ograniczony?







745. Jeśli teza zadania ma być prawdziwa, to powinna ona zachować słuszność po zastąpieniu punktu P przez P' – drugi punkt prostej BC, leżący w tej samej odległości od A, co punkt P; zaś środek szukanego okręgu powinien leżeć na osiach symetrii trójkątów równoramiennych CKL i APP' – czyli na wysokościach trójkąta ABC. Stąd domysł uściślenia tezy zadania: wykazać, że środki odcinków AP, BQ, CK, CL (o jednakowej długości $2r$) leżą na okręgu o środku H (ortocentrum trójkąta ABC).

Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A i niech M będzie środkiem odcinka AP. Weźmy pod uwagę okrąg o środku M i promieniu r (czyli o średnicy AP). Prosta HM przecina ów okrąg w punktach U, V (gdy punkty M, H pokrywają się, przyjmijmy $U=A$, $V=D$). Cięciwa AD tego okręgu oraz jego średnica UV przecinają się w punkcie H. Zatem

$$|AH|\cdot|HD|=|UH|\cdot|HV|=(r-|HM|)(r+|HM|),$$

czyli

$$|HM|=\sqrt{r^2-|AH|\cdot|HD|}.$$

Jeśli teraz BE jest drugą wysokością trójkąta ABC, a N jest środkiem odcinka BQ, to analogicznie uzyskujemy równość

$$|HN|=\sqrt{r^2-|BH|\cdot|HE|}.$$

Ale $|AH|\cdot|HD|=|BH|\cdot|HE|$; wynika to z podobieństwa trójkątów AHE i BHD. Tak więc $|HM|=|HN|$; środki odcinków AP i BQ leżą w jednakowej odległości od punktu H. Analogicznie, w tej samej odległości od H leżą też środki odcinków CK i CL. To właśnie nasza teza.

746. Istnieje. Przykład Autora (W. Bednarek): ciąg $a_n=2^{kn+1}$.

Bierzemy dowolnie utworzoną sumę skończenie wielu wyrazów, o numerach $m_1<\ldots<m_s$:

$$S=\sum_{i=1}^{s}a_{m_i}=\sum_{i=1}^{s}2^{km_i+1}=2^{km_1+1}\left(\sum_{i=1}^{s}2^{k(m_i-m_1)}\right).$$

Suma w dużym nawiasie jest liczbą nieparzystą (jej pierwszy składnik to jedynka). Gdyby dla pewnej liczby naturalnej A zachodziła równość $S=A^k$, wówczas pisząc A w postaci $A=2^tM$ (M nieparzyste) i przyrównując potęgi dwójki w S i w A^k uzyskalibyśmy równość $kt=km_1+1$; oczywista sprzeczność.

Pozostaje zauważyć, że ciąg o wyrazach $a_n^{1/n}=2^k\cdot 2^{1/n}\leqslant 2^{k+1}$ jest ograniczony.