Zadania z matematyki nr 747, 748

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2017

747. Funkcja f, o wartościach rzeczywistych, jest określona, wypukła i różniczkowalna na zbiorze wszystkich liczb dodatnich; przy tym $|f'(n^2)| \geqslant 1/n^2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Udowodnić, że funkcja f jest nieograniczona.

748. Czy można w pola tablicy o rozmiarach 8×8 wpisać liczby -1, 0, 1 (w każde pole jedną liczbę) tak, by sumy liczb w wierszach oraz sumy liczb w kolumnach utworzyły układ 16 różnych wartości? Czy odpowiedź zmieni się, gdy będziemy rozważali tablicę 14×14 (i wymagali 28 różnych wartości)?

Zadanie 748 zaproponował pan Piotr Wiśniewski z Warszawy

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 737 ($WT = 2{,}89$) i 738 ($WT = 1{,}21$) z numeru 3/2017

Adam Dzedzej	Gdańsk	43,22
Jerzy Cisło	Wrocław	41,85
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,86
Roksana Słowik	Knurów	40,36
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Janusz Olszewski	Warszawa	39,15
Marcin Kasperski	Warszawa	37,67
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45

Gromadne mijanie „44” zapowiada się niebawem...

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2017

Przypominamy treść zadań:

743. W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy działanie: $x \diamondsuit y = (x/y) + (y/x)$. Niech a, b, c, d będą liczbami, spełniającymi równanie

$$(a \diamondsuit b) + (b \diamondsuit c) + (c \diamondsuit d) + (d \diamondsuit a) = (a \diamondsuit c) + (b \diamondsuit d) + ((ac) \diamondsuit (bd)) + 2.$$

Czy a, b, c, d mogą być czterema różnymi liczbami? Czy mogą być wśród nich trzy różne liczby?

744. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech M będzie takim zbiorem dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary różnych liczb $m, n \in M$ zachodzi nierówność $mn \leqslant k^2|m-n|$. Wykazać, że zbiorze M jest nie więcej niż $2k-1$ liczb. Czy dla każdej liczby $k \geqslant 2$ istnieje $(2k-1)$-elementowy zbiór M o podanej własności?

743. Niech $L(a, b, c, d)$ oznacza lewą stronę podanego równania, pomnożoną przez $abcd$, i niech $P(a, b, c, d)$ oznacza prawą stronę tego równania, pomnożoną przez $abcd$. Są to wielomiany czterech zmiennych, jednorodne, czwartego stopnia. Skontrolujmy ich wartości, gdy np. $c = d$:

$$L(a,b,c,c) = \left(\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + 2 + \frac{a^2+c^2}{ac}\right) abc^2 =$$
$$= (a^2+b^2)c^2 + (b^2+c^2)ac + 2abc^2 + (a^2+c^2)bc;$$
$$P(a,b,c,c) = \left(\frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{a^2c^2+b^2c^2}{abc^2} + 2\right) abc^2 =$$
$$= (a^2+c^2)bc + (b^2+c^2)ac + (a^2c^2+b^2c^2) + 2abc^2;$$

te wartości są równe. To znaczy, że wielomian $F = P - L$ dzieli się przez dwumian $(c-d)$. Analogicznie (wobec niezmienniczości przy cyklicznym przesunięciu zmiennych) dzieli się przez dwumiany $(d-a)$, $(a-b)$, $(b-c)$. Stąd wniosek, że dzieli się przez iloczyn tych dwumianów, a iloraz jest pewną stałą. Biorąc dowolne różne liczby a, b, c, d, stwierdzamy, że ta stała to 1. Tak więc

$$F(a,b,c,d) = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$

(oczywiście można było tę tożsamość sprawdzić wprost, podstawiając wyrażenie określające rozważane działanie, przenosząc wszystko na jedną stronę i pracowicie przekształcając).

Dane w zadaniu równanie $F(a, b, c, d) = 0$ nie jest spełnione dla żadnej czwórki różnych liczb a, b, c, d, jest zaś spełnione dla wielu czwórek utworzonych z trzech różnych liczb (z jednym powtórzeniem).

744. Podany warunek przepisujemy równoważnie jako $|m^{-1} - n^{-1}| \geqslant k^{-2}$. Niech K będzie zbiorem odwrotności wszystkich liczb za zbioru M. Dowolne dwa elementy zbioru K są więc oddalone o co najmniej $1/k^2$. Zatem w każdym spośród k przedziałów

$$\left(0, \frac{1}{k^2}\right], \quad \left(\frac{1}{k^2}, \frac{2}{k^2}\right], \quad \left(\frac{2}{k^2}, \frac{3}{k^2}\right], \quad \ldots, \quad \left(\frac{k-1}{k^2}, \frac{k}{k^2}\right]$$

może być co najwyżej jeden element zbioru K. Pozostałe liczby dodatnie tworzą przedział $(1/k, \infty)$, w którym są jedynie odwrotności liczb naturalnych $1, 2, \ldots, k-1$. To pokazuje, że zbiór K (więc i zbiór M) może liczyć co najwyżej $2k-1$ elementów.

Odpowiedź na drugie pytanie z zadania jest przecząca: na przykład dla $k = 9$ nie istnieje 17-elementowy zbiór M o podanej własności. Jak w przypadku ogólnym, zauważamy, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{1}{81}\right]$, $\left(\frac{1}{81}, \frac{2}{81}\right]$, $\left(\frac{2}{81}, \frac{3}{81}\right]$ może być tylko jeden element zbioru K. Dalej, odwrotności liczb naturalnych, leżące w przedziale $\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right]$, rozbijamy na pięć podzbiorów:
$\left\{\frac{1}{26}, \ldots, \frac{1}{20}\right\}$, $\left\{\frac{1}{19}, \ldots, \frac{1}{16}\right\}$, $\left\{\frac{1}{15}, \frac{1}{14}, \frac{1}{13}\right\}$, $\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{11}\right\}$, $\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\right\}$ – każdy z nich ma średnicę mniejszą niż $\frac{1}{81}$, więc zawiera co najwyżej jeden element zbioru K. No i zostają jeszcze ułamki $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2}, 1$. Liczność zbioru K (więc i M) nie przekracza $3 + 5 + 8$, czyli 16.