Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2017

Zadania z matematyki nr 745, 746

Redaguje Marcin E. KUCZMA

745. Na obwodzie trójkąta ABC leżą cztery różne punkty K, L, P, Q: punkty K, L na boku AB, punkty P i Q odpowiednio na bokach BC i CA; przy tym odcinki AP, BQ, CK i CL mają jednakową długość. Udowodnić, że środki tych czterech odcinków leżą na jednym okręgu.

746. Dana jest liczba naturalna $k \geqslant 2$. Czy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n), którego żaden wyraz ani żadna suma skończenie wielu jego wyrazów nie jest k-tą potęgą liczby naturalnej, a przy tym ciąg $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ jest ograniczony?

Zadanie 746 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 735 ($WT = 2{,}82$) i 736 ($WT = 2{,}08$) z numeru 2/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,86
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Roksana Słowik	Knurów	39,15
Adam Dzedzej	Gdańsk	39,12
Jerzy Cisło	Wrocław	37,87
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45
Marcin Kasperski	Warszawa	36,46
Janusz Olszewski	Warszawa	35,05

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2017

Przypominamy treść zadań:

741. Niech W będzie wielościanem wypukłym, środkowo-symetrycznym, i niech π będzie ustaloną płaszczyzną, przechodzącą przez środek symetrii. Przekrój wielościanu W płaszczyzną π jest zawarty w kole o promieniu r. Udowodnić, że przekrój wielościanu W każdą płaszczyzną, równoległą do π, jest zawarty w pewnym kole o promieniu r – lub podać przykład, pokazujący nieprawdziwość takiego stwierdzenia.

742. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 4k+1$. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia s, mniejsza od p, dla której różnica $sp - \lfloor\sqrt{sp}\,\rfloor^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

741. Banalny kontrprzykład: sześcian (o krawędzi a). Weźmy jego dwa przeciwległe wierzchołki A, B (końce przekątnej długości $a\sqrt{3}$). Płaszczyzna $\pi \perp AB$, przechodząca przez środek O, tworzy w przecięciu z sześcianem sześciokąt foremny, którego wierzchołkami są środki niektórych krawędzi sześcianu, leżące w odległości $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ od środka O.

Przekrój sześcianu płaszczyzną $\pi' \| \pi$, przechodzącą przez trzy wierzchołki (połączone krawędziami np. z punktem A) jest trójkątem foremnym o boku $a\sqrt{2}$. Najmniejsze koło, zawierające ów trójkąt, ma promień $R = \frac{1}{3}a\sqrt{6} > r$.

742. Liczba pierwsza $p = 4k+1$ jest sumą dwóch kwadratów (jedno z dobrze znanych twierdzeń Fermata): $p = a^2 + b^2$; liczby całkowite $a, b > 0$ muszą być względnie pierwsze. Istnieją wobec tego liczby całkowite x, y, dla których $ax + by = 1$, przy czym $|x| < b$, $|y| < a$ (łatwe uzasadnienie przez algorytm Euklidesa).

Wykażemy, że liczba $s = x^2 + y^2$ ma własności, o które chodzi w zadaniu. Mamy bowiem oszacowanie $s < a^2 + b^2 = p$ oraz równość

$$sp = (a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = \\ = 1 + (ay-bx)^2.$$

Widać z niej, że $\sqrt{sp} = |ay - bx|$. W konsekwencji $sp - \lfloor\sqrt{sp}\,\rfloor^2 = 1$; jest to niewątpliwie kwadrat liczby całkowitej dodatniej.

Uwaga. Zapewne innymi metodami także można uzyskać tezę zadania, niekoniecznie wzmocnioną do orzeczenia „…jest kwadratem jedynki”. Pan Tomasz Ordowski, który zadanie zaproponował, zwrócił uwagę na ciąg o wyrazach

$$a(n) = \min\{s \in \mathbb{Z}:\ s > 0, \\ \exists\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} :\ sn - \lfloor\sqrt{sn}\,\rfloor^2 = m^2\},$$

obecny w OEIS (`oeis.org/A245474`). Nie jest trudno wykazać, że dla liczb pierwszych postaci $p = 4k+3$ zachodzi równość $a(p) = p$; natomiast dla liczb pierwszych $p = 4k+1$ zachodzi nierówność $a(p) < p$, i to była treść naszego zadania; autorem podanego dowodu jest Robert Israel. (Dla liczb złożonych ciąg zachowuje się dość kapryśnie).