delta
POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY
$h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592\ldots$

Zadania I stopnia Olimpiad 2005/2006 będą opublikowane w Delcie 9/2005

Olimpiada

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LVI OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2004/2005

ZAWODY II STOPNIA (25–26 lutego 2005)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których n^n+1 oraz $(2n)^{2n}+1$ są liczbami pierwszymi.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geqslant 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że $9T^2 < 2K^3$.

4. Dany jest wielomian $W(x) = x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której

$$W(m) = W(m+1) = 0\,.$$

5. Dany jest romb $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle BAD > 60^\circ.$$

Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym

$$\sphericalangle ECF = \sphericalangle ABD.$$

Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że

$$\frac{PQ}{EF} = \frac{AB}{BD}\,.$$

6. Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2\,.$$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl

ZAWODY III STOPNIA (13–14 kwietnia 2005)

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x - y)^n = xy\,.$$

2. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o. Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC\,.$$

Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q. Dowieść, że $PS = QS$.

3. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n.

4. Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ są dodatnie oraz

$$\sqrt{x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + cx_2x_3 + x_3^2} + \ldots$$

$$\ldots + \sqrt{x_n^2 + cx_nx_1 + x_1^2} = \sqrt{c+2}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,,$$

to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1 = a\,, \;\; x_2 = b\,, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ dla } n \geqslant 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m.

6. Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż 3/4.

Informacje o przebiegu LVI Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1231 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 506 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego 124 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 15 kwietnia br. postanowił przyznać 16 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Michał PILIPCZUK (**24 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Joanna Jaszuńska, Waldemar Pałuba, Tomasz Żukowski, Karol Cwalina, Marcin Pilipczuk, Wojciech Czerwiński, Jakub Onufry Wojtaszczyk, Łukasz Bury, Maria Donten i Bartłomiej Romański).

II miejsce: Tomasz WARSZAWSKI (**23 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca, Michał Kapustka, Grzegorz Kapustka, Jacek Dymel, Sławomir Dinew, Żywomir Dinew, Leszek Pieniążek i Witold Jarnicki).

Nagrody stopnia drugiego

Miejsca III–IV:

Piotr ACHINGER (**19 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Jerzy Konarski, Wojciech Boratyński, Edward Stachowski i Marcin Pilipczuk).

Nadbor DROZD (**19 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciele: Cezary Urban i Augustyn Kałuża).

Miejsca V–VIII:

Krzysztof KĄS (**18 pkt.**), kl. III, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska, Adam Neugebauer i Robert Kąs).

Tomasz KULCZYŃSKI (**18 pkt.**), kl. I, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Jolanta Jerzy, Henryk Pawłowski i Lev Kourliandtchik).

Wojciech ŚMIETANKA (**18 pkt.**), kl. I, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Filip WOLSKI (**18 pkt.**), kl. II, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Miejsca IX–XI:

Piotr BUTRYN (**17 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Michał Krych, Paweł Strzelecki, Tomasz Żukowski i Jerzy Bednarczuk).

Michał JASTRZĘBSKI (**17 pkt.**), kl. I, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Wiktor Bartol i Jerzy Bednarczuk).

Andrzej KAMIŃSKI (**17 pkt.**), kl. III I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (nauczyciel: Paweł Rudecki).

Nagrody stopnia trzeciego

Miejsce XII:

Małgorzata BLADOSZEWSKA (**15 pkt.**), kl. I, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Miejsca XIII–XVI:

Filip GROTKOWSKI (**14 pkt.**), kl. III, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (nauczyciel: Henryk Pawłowski).

Jakub KALLAS (**14 pkt.**), kl. I, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Michał MARCINKOWSKI (**14 pkt.**), kl. II, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciele: Przemysław Szczepaniak, Augustyn Kałuża i Zbigniew Romanowicz).

Sylwester ZAJĄC (**14 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

III. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 18 zawodników:

Miejsca XVII–XXXIV:

Marek ADAMCZYK (**12 pkt.**), kl. III, LO im. Bolesława Prusa w Żarach (nauczyciel: Jerzy Kacierzyński).

Krzysztof DOROBISZ (**12 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca, Lucyna Cięciwa, Bartosz Walczak i Michał Lasoń).

Łukasz GARNCAREK (**12 pkt.**), kl. II, II LO im. Marii Konopnickiej w Opolu (nauczyciele: Maria Romanowska i Zbigniew Garncarek).

Jarosław GŁOWACKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Szymon GWÓŹDŹ (**12 pkt.**), kl. III, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim (nauczyciel: Paweł Kwiatkowski).

Kamil HERBA (**12 pkt.**), kl. II, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Martyna JÓŹWIAK (**12 pkt.**), kl. II, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Anna Karaszewska i Lev Kourliandtchik).

Karol KOSIŃSKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Stefan ŁAPICKI (**12 pkt.**), kl. III, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciel: Augustyn Kałuża).

Maciej MACHULEC (**12 pkt.**), kl. I, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa, Michał Matuszczyk i Dorota Didik).

Piotr NAYAR (**12 pkt.**), kl. III, VIII LO im. Władysława IV w Warszawie (nauczyciele: Waldemar Pałuba i Emilia Psoda).

Hubert ORLIK-GRZESIK (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Patryk PAGACZ (**12 pkt.**), kl. III, ZSO nr 1 im. Mikołaja Kopernika w Jarosławiu (nauczyciel: Krzysztof Wilgucki).

Paweł PASTECZKA (**12 pkt.**), kl. II, II LO im. Emilii Plater w Sosnowcu (nauczyciele: Maria Bańska i Michał Matuszczyk).

Jan SZEJKO (**12 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Waldemar Pałuba i Tomasz Żukowski).

Łukasz WIATRAK (**12 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Paweł ZABORSKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca i Alicja Dłużeń).

Paweł ZACZKOWSKI (**12 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa i Tomasz Szymczyk).

IV. W skład delegacji polskiej na XLVI Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Meksyku w dniach 9–18 lipca br., powołani zostali:
Piotr Achinger,
Nadbor Drozd,
Tomasz Kulczyński,
Michał Pilipczuk,
Wojciech Śmietanka
i *Tomasz Warszawski.*

Jako zawodników rezerwowych powołano
Filipa Wolskiego
i *Michała Jastrzębskiego.*

V. Na XXVIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 27 czerwca – 6 lipca br. w Austrii, powołano delegację w składzie:
Małgorzata Bladoszewska,
Piotr Butryn,
Krzysztof Dorobisz,
Kamil Herba,
Andrzej Kamiński
i *Paweł Zaczkowski.*

Zawodnicy rezerwowi:
Jan Szejko,
Łukasz Wiatrak,
Martyna Jóźwiak
i *Paweł Pasteczka.*

VI. Powołano też delegację na XVI Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich, które odbędą się w Szwecji na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujący:
Michał Jastrzębski,
Jakub Kallas,
Maciej Machulec
Michał Marcinkowski
i *Filip Wolski.*

Zawodnicy rezerwowi:
Jan Szejko,
Martyna Jóźwiak,
Łukasz Wiatrak
i *Paweł Pasteczka.*

VII. Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 5–19 czerwca br. w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:
Piotr Achinger,
Małgorzata Bladoszewska,
Piotr Butryn,
Szymon Doroz,
Szymon Giżecki,
Michał Jastrzębski,
Martyna Jóźwiak,
Jakub Kallas,
Tomasz Kulczyński,
Maciej Machulec,
Michał Marcinkowski,
Przemysław Mazur,
Paweł Pasteczka,
Natalia Sakowska,
Jan Szejko,
Tomasz Szumny,
Wojciech Śmietanka,
Tomasz Warszawski,
Łukasz Wiatrak
i *Paweł Zaczkowski.*

Zawodnicy rezerwowi:
Aleksander Jurkowski,
Filip Wieczorek,
Michał Frankiewicz
i *Urszula Swianiewicz.*

LIV OLIMPIADA FIZYCZNA 2004/2005

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: http://www.kgof.edu.pl

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Pocisk w kształcie stożka o polu podstawy S i kącie rozwarcia 2α porusza się z prędkością v wzdłuż swojej osi (w stronę wierzchołka) w bardzo rozrzedzonym jednoatomowym gazie. Temperatura gazu jest na tyle niska, a prędkość v na tyle duża, że można przyjąć, że atomy gazu są nieruchome. Gęstość gazu jest równa ρ.

Zakładając, że atomy gazu zderzają się z powierzchnią pocisku doskonale sprężyście i nie zderzają się ze sobą, obliczyć siłę oporu, jaka działa na pocisk. Powierzchnia pocisku jest idealnie gładka. Podaj wartość liczbową dla $\rho = 10^{-3}$ kg/m^3, $v = 7$ km/s, $\alpha = 45°$, $S = 0{,}01$ m^2.

2. Wąska wiązka fullerenów – cząsteczek węgla C_{60} w kształcie piłki futbolowej – pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej sieci $d = 100$ nm (siatką dyfrakcyjną jest płytka z azotku krzemu z wyciętymi równoległymi wąskimi szczelinami). Za siatką znajdują się detektory zliczające cząsteczki docierające do poszczególnych punktów płaszczyzny („ekranu") znajdującej się w dużej odległości od siatki i równoległej do niej. Wskazania detektorów służą do wyznaczenia powstałego obrazu interferencyjnego.
a) Przyjmując, że rozkład prędkości cząsteczek (v) w wiązce jest rozkładem jednorodnym w zakresie $v \in [v_0 - \Delta v, v_0 + \Delta v]$, wyznacz kąt ugięcia wiązki α_n odpowiadający położeniu środka prążka interferencyjnego n-tego rzędu oraz kąt $\Delta\alpha_n$ odpowiadający szerokości tego prążka (prążek jest obszarem, do którego dolatują cząsteczki). Podaj wartości liczbowe dla $n = 1$, $v_0 = 117$ m/s, $\Delta v = 0,17 v_0$. Rozważ tylko te prążki, dla których $\sin\alpha_n \approx \alpha_n$.
b) Jaki jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości cząsteczek w wiązce (przy ustalonym v_0), aby prążek n-tego rzędu był dobrze rozróżnialny, tzn. aby po obu jego stronach były miejsca, do których nie docierają cząsteczki?

Zakładamy, że każda z cząsteczek ma dokładnie określony pęd.

Masa atomu węgla jest równa $2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, stała Plancka $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js.

3. Rozważmy gumowy balonik, który po nadmuchaniu powietrzem ma kształt kuli.
a) Gdy promień balonika wynosił $r_1 = 0{,}1$ m, to wewnątrz panowało ciśnienie $p_1 = 1{,}1 \cdot 10^5$ Pa. Jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonika, po nadmuchaniu go tak, by miał promień $r_2 = (3/2)r_1$? W obu przypadkach temperatura powietrza wewnątrz balonika jest równa temperaturze otoczenia i wynosi $T_0 = 300$ K. Ciśnienie powietrza otaczającego balonik jest równe $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa.
b) Balonik o promieniu r_2 (czyli po nadmuchaniu zgodnie z pkt. a)) zanurzono powoli w wodzie na taką głębokość, by jego promień zmalał do $r_3 = r_1$. Ile wynosi ta głębokość? Jakie są temperatura i ciśnienie wewnątrz balonika po zanurzeniu? Zakładamy, że powłoka balonika nie przepuszcza ciepła. Początkowa temperatura wewnątrz balonika była równa T_0. Balonik przed zanurzeniem znajdował się tuż nad powierzchnią wody.
c) Jaką pracę wykonano w trakcie zanurzania zgodnie z pkt. b)?

Energia sprężysta gumy, z której jest wykonany balonik, jest równa $E_s = (1/2)\alpha S^2$, gdzie α jest pewną stałą, a S – powierzchnią balonika. Balonik jest na tyle mały, że również po zanurzeniu w wodzie ma kształt kuli. Przyjmij, że powietrze zachowuje się jak gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości $c_V = (5/2)R$, gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Guma, z której jest wykonany balonik, ma zaniedbywalną masę oraz zaniedbywalną pojemność cieplną. Zaniedbaj również gęstość powietrza w porównaniu z gęstością wody $d_w = 1000$ kg/m^3. Przyspieszenie ziemskie g $= 9{,}8$ m/s^2.

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:
- cienki drut z niemagnetycznego metalu,
- silny magnes stały,
- ciężarek o masie $m = (100,0 \pm 0{,}5)$ g,
- statyw, pręty stalowe, uchwyty,
- linijkę,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- przewody elektryczne z zaciskami,
- papier milimetrowy.

Wyznacz gęstość liniową (masę na jednostkę długości) drutu. Przyspieszenie ziemskie wynosi g $= 9{,}81$ m/s^2.

Wskazówka. Prędkość V fal poprzecznych w strunie o gęstości liniowej μ napiętej siłą F wyraża się wzorem $V = \sqrt{F/\mu}$.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Statek kosmiczny Obcych zbliża się do Ziemi wzdłuż jej osi obrotu ze stałą prędkościa v (porównywalną z prędkością światła c) od strony Bieguna Północnego.
a) Gdy radar statku pokazuje, że Biegun Północny znajduje się w odległości d_r od statku, Obcy robią Ziemi zdjęcie. Jaki zakres szerokości geograficznych Ziemi obejmuje to zdjęcie?
b) Na innym zdjęciu wykonanym przez Obcych widać obszar Ziemi o szerokościach geograficznych północnych od 30° do 90°. Jaką odległość (mierzoną w wielokrotnościach promienia Ziemi R) wskazywał radar statku w chwili zrobienia tego zdjęcia, jeśli zbliżał się on z prędkością 0,8 c? Jaka była w układzie statku odległość statku Obcych od Bieguna Północnego

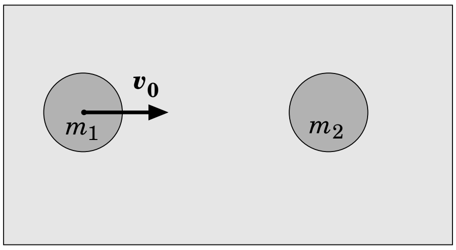
w chwili zrobienia zdjęcia? Jakie byłyby te odległości, gdyby zamiast zbliżać się, statek oddalał się od Bieguna Północnego z prędkością 0,8 c?

Statek jest mały w porównaniu z Ziemią i odległością d_r. Aparat ma wystarczająco szeroki „kąt widzenia”.

Radar mierzy odstęp czasu pomiędzy wysłaniem a odebraniem sygnału odbitego. W momencie odebrania sygnału radar podaje odległość równą połowie tego czasu pomnożonej przez prędkość światła.

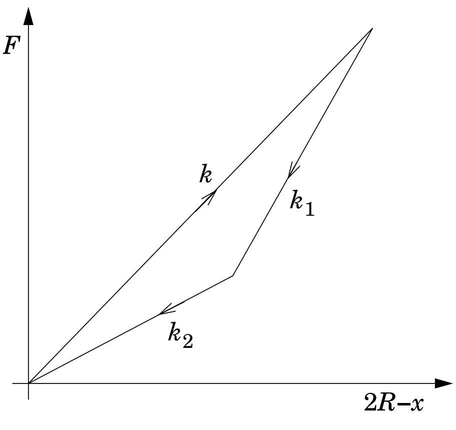
Zrobienie zdjęcia polega na otwarciu na bardzo krótką chwilę migawki aparatu i naświetleniu błony fotograficznej.

2. Dwa krążki o jednakowych promieniach R i jednakowych grubościach, lecz różnych masach m_1 i m_2 mogą się ślizgać bez tarcia po poziomej płaszczyźnie. Ich osie są pionowe. Nastąpiło centralne zderzenie krążków. Przed zderzeniem pierwszy krążek poruszał się ruchem postępowym (bez obrotu) z prędkością v_0 w kierunku spoczywającego drugiego krążka (patrz rys. 1).



Rys. 1

Ugięcie każdego krążka podczas zderzenia było znacznie mniejsze od R. Siła $\vec{F}(x)$, z jaką odpychają się krążki podczas zderzenia, jest funkcją odległości x między ich środkami i działa wzdłuż prostej łączącej te środki. Siła ta zależy od tego, czy środki krążków zbliżają się, czy oddalają. Podczas zbliżania się krążków $F(x) = k \cdot (2R - x)$. Natomiast podczas oddalania się krążków wykres zależności $F(x)$ składa się z dwóch odcinków o nachyleniu k_1 i k_2 (zobacz rys. 2), przy czym $k_1 > k > k_2$.



Rys. 2

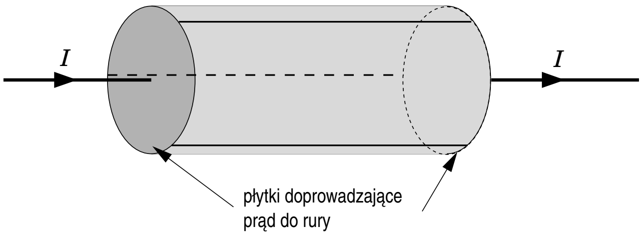
W wyniku zderzenia pierwszy krążek zatrzymał się.

Oblicz iloraz m_1/m_2 mas krążków.

Jaką prędkość uzyskał drugi krążek w wyniku zderzenia? Podaj wartości liczbowe tych wielkości dla

$$v_0 = 5\ \text{m/s}, \quad k_1/k = 2, \quad k_2/k = 0{,}5.$$

3. Metalową, cienkościenną rurę (boczną powierzchnię walca), o promieniu r i długości l przecięto wzdłuż tworzących na trzy identyczne części. Części tych od siebie nie oddalono. Do końców układu (podstaw walca) przytknięto płytki (krążki) z idealnego przewodnika. Do pierwszej z nich jest doprowadzany, a z drugiej – odprowadzany wzdłuż osi układu długimi przewodami prąd o natężeniu I (rys. 3).



Rys. 3

Wyznacz siłę elektrodynamiczną, jaka działa na każdą z części rury.

Podaj liczbową wartość tej siły dla

$$l = 1\ \text{m}, \quad r = 1\ \text{cm}, \quad I = 100\ \text{A}$$

oraz dla

$$l = 1\ \text{cm}, \ r = 1\ \text{m}, \ I = 100\ \text{A}.$$

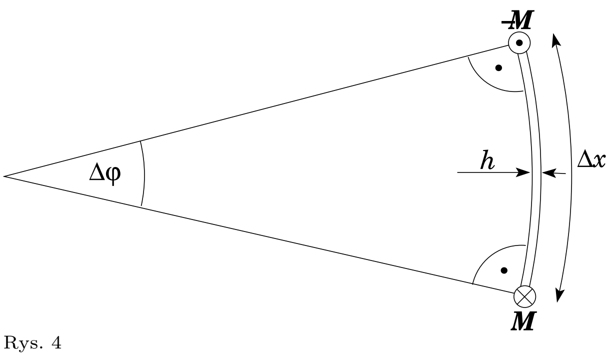
Przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2$.

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:
• kartkę papieru formatu A4 o gęstości powierzchniowej $80\,\text{g/m}^2$,
• papier milimetrowy,
• linijkę,
• dwie książki,
wyznacz moduł Younga papieru, z którego wykonana jest kartka.

Wskazówka. Działanie na końce elementu belki o długości Δx przeciwnie skierowanych momentów sił o wartości M (rys. 4) powoduje zgięcie tego elementu o kąt $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = \frac{12M}{Ebh^2}\Delta x,$$

gdzie E — moduł Younga, h — grubość belki, b — szerokość belki.



Rys. 4

Laureaci LIV Olimpiady Fizycznej 2004/2005

1. Czajka Sieciech, nauczyciel: mgr Andrzej Majerowski, klasa III, V Liceum Ogólnokształcące im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie.

2. Grzybowski Marcin Jan, nauczyciel: mgr Stanisław Szymonik, klasa III, Liceum Ogólnokształcące im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli.

3. Kąs Krzysztof Robert, nauczyciel: mgr Tomasz Skowron, klasa III, XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie.

4. Niemkiewicz Krzysztof Zbigniew, nauczyciel: mgr Marek Golka, klasa II, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu.

5. Maczyński Kornel Maksymilian, nauczyciel: mgr Ewa Gajda, klasa II, V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej.

6. Pecelerowicz Michał Wacław, nauczyciel: mgr Robert Stasiak, klasa III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

7. Smoleński Tomasz Marek, nauczyciel: mgr Marek Golka, klasa I, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu.

8. Sobczyk Marcin Piotr, nauczyciel: dr Jerzy Mucha, klasa II, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

9. Chrapkiewicz Radosław Tomasz, nauczyciel: mgr Ewa Gajda, klasa II, V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej.

10. Purski Jakub Krzysztof, nauczyciel: mgr Anna Dobek, klasa III, Liceum Ogólnokształcące im. Marii Curie-Skłodowskiej w Rawie Mazowieckiej.

11. Drozd Nadbor Długosz, nauczyciel: mgr Janusz Skiba, klasa III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

12. Jasiński Daniel, nauczyciel: mgr Ewa Kulas, klasa III, I Liceum Ogólnokształcące im. Wojciecha Kętrzyńskiego w Giżycku.

13. Podkowa Bartosz Mateusz, nauczyciel: dr Marek Sowa, klasa III, Prywatne Liceum Ogólnokształcące im. Królowej Jadwigi w Lublinie.

14. Barmuta Paweł, nauczyciel: mgr Wilhelmina Czerniawska, klasa III, III Liceum Ogólnokształcące im. Krzysztofa Kamila Baczyńskiego w Białymstoku.

15. Żukiewicz Filip Remigiusz, nauczyciel: mgr Krystyna Jagielska, klasa III, Społeczne Liceum Ogólnokształcące STO w Szczecinku.

16. Grad Michał, nauczyciel: mgr Józef Greupner, klasa III, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.

XLVIII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2004/2005

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. Zderzająca się z Księżycem planetoida może spowodować znaczne zniszczenia. Warto zorientować się, jakie musi mieć rozmiary ciało, by jego zderzenie z Księżycem było znaczące. Aby tego dokonać:

a) zaproponuj orbitę planetoidy przyjmując, że jest ona ciałem Układu Słonecznego, dla której szybkość zderzenia z Księżycem będzie stosunkowo wysoka oraz orbitę, dla której prędkość będzie możliwie mała. W obu przypadkach oszacuj te prędkości.

b) Jakie rozmiary musi mieć ciało zderzające się z Księżycem z określonymi w punkcie a) prędkościami, by energia zderzenia odpowiadała wybuchowi bardzo wielkiej (gigatona TNT) bomby jądrowej.

Przyjmij gęstość ciała jako równą 2000 kg/m^3. Energia wydzielana przy wybuchu 1 kg TNT wynosi około $4 \cdot 10^6$ J.

2. Zaobserwowano, że gwiazda zmienna pulsująca δ Cephei osiągnęła maksimum swojej jasności w następujących datach i momentach (podanych w czasie uniwersalnym):

2004	kwiecień	18	godzina 01.52
2004	maj	4	godzina 04.14
2004	maj	14	godzina 21.49

Ponadto stwierdzono, że gwiazda w nocy 12/13 maja oraz 17/18 maja była blisko minimum swojej jasności. W trakcie całego okresu obserwacji jasność gwiazdy zmieniała się w granicach 3,48–4,37 mag.

Na podstawie tych danych wyznacz przybliżony okres zmian jasności tej cefeidy, a następnie korzystając z zależności (odkrytej przez H. Leavitt) pomiędzy okresem cefeidy i jej jasnością absolutną, oblicz odległość tej gwiazdy.

3. Księżyc Saturna, Phoebe – jeden z celów badań misji Cassini-Huygens – obiega macierzystą planetę po wydłużonej orbicie o mimośrodzie $e = 0{,}164$ w średniej odległości $a = 13 \cdot 10^6$ km. W punkcie swojej orbity położonym najdalej od planety na niebie oglądanym z Saturna miałby jasność ok. $6{,}^{\mathrm{m}}8$ w „pełni”. Czy będąc w najmniejszej odległości od planety byłby w „pełni” widoczny gołym okiem?

Zakładamy, że Saturn obiega Słońce po okręgu o promieniu $a = 1427 \cdot 10^6$ km.

4. Opisz zjawiska w układzie Ziemia – Księżyc w sytuacji, gdy orbita Księżyca leżałaby dokładnie w płaszczyźnie ekliptyki. Orbity Ziemi i Księżyca traktuj jako okręgi o promieniach równych ich obecnym średnim odległościom odpowiednio od Słońca i Ziemi.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. W dniu 31 XII 2004 po przebyciu 187 km w czasie 15 dni Marek Kamiński, Janek Mela oraz Wojciech Ostrowski stanęli na południowym biegunie Ziemi. Przyjmując, że ich droga przebiegała południkowo, opisz ruch Słońca na sferze niebieskiej podczas wędrówki Polarników.

Deklinacja Słońca δ w grudniu 2004 r. wynosiła:

dzień	16	17	18	19
δ	$-23°19'$	$-23°22'$	$-23°24'$	$-23°25'$

dzień	20	21	22	23
δ	$-23°26'$	$-23°26'$	$-23°26'$	$-23°26'$

dzień	24	25	26	27
δ	$-23°25'$	$-23°24'$	$-23°22'$	$-23°19'$

dzień	28	29	30	31
δ	$-23°17'$	$-23°13'$	$-23°10'$	$-23°05'$

2. Ciała Obłoku Oorta uchodzą za pierwotną materię Układu Słonecznego. Jednak zmiana temperatury ciał Obłoku może bardzo zmienić własności ich powierzchni. Oszacuj, jaki wpływ na temperaturę powierzchni składnika Obłoku Oorta może mieć:
a) gwiazda o jasności absolutnej $M_g = -5$ wielkości gwiazdowej, przechodząca w pobliżu Słońca w odległości około $d_g = 1$ ps;
b) wybuch gwiazdy supernowej znajdującej się w odległości $d_s = 1$ kps, o jasności absolutnej $M_s = -18$ wielkości gwiazdowej.

O ile stopni wzrośnie temperatura powierzchni ciała z Obłoku Oorta w obu przypadkach?

Przyjmij następujące założenia:
• ciało z Obłoku Oorta znajduje się na wokółsłonecznej orbicie kołowej o promieniu $R_o = 2000$ AU;
• ciało z Obłoku Oorta ma własności ciała doskonale czarnego;
• jasność absolutna Słońca wynosi 4,75 wielkości gwiazdowej, a stała słoneczna (w odległości 1 AU) wynosi 1372 W/m^2.

Przedyskutuj, jaki wpływ na rzeczywistą temperaturę będzie miał okres obrotu ciała wokół własnej osi.

3. Rozpatrzmy takie zaćmienie Słońca, które zaczyna się dokładnie w momencie, gdy linia łącząca środki tarcz Słońca i Księżyca jest prostopadła do ekliptyki, czyli drogi Słońca na sferze.

Jakie to będzie zaćmienie? Oceń, jak długo ono trwa z punktu widzenia obserwatora geocentrycznego, w sytuacji, gdy Ziemia jest w średniej odległości od Słońca, a Księżyc w średniej odległości od Ziemi.

Uwaga: całe zjawisko zachodzi na niewielkim obszarze sfery niebieskiej i można je rozpatrywać tak, jakby przebiegało na płaszczyźnie, a wprowadzenie obserwatora geocentrycznego dopuszcza pominięcie wpływu obrotu Ziemi na czas zjawiska.

4. „Sfera oddziaływania" jest obszarem wokół planety, w którym ruch ciała o małej masie lepiej jest opisywać jako ruch keplerowski względem planety i perturbowany przez gwiazdę niż odwrotnie. W dowolnym kierunku od planety tworzącym kąt φ z kierunkiem ku gwieździe odległość granicy sfery oddziaływania od planety wynosi

$$r = R\sqrt[5]{\frac{\mu^2}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}},$$

gdzie R jest odległością planety od gwiazdy, μ – stosunkiem masy planety do masy gwiazdy.

Zbadaj, czy realnie mógłby istnieć układ: gwiazda o masie M, obiegająca ją planeta o masie m i satelita planety o pomijalnej masie, taki by kołowa keplerowska orbita satelity w całości leżała w sferze oddziaływania planety, a okres obiegu satelity wokół planety równałby się okresowi obiegu planety wokół gwiazdy.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Stacja kosmiczna porusza się po kołowej orbicie na wysokości 300 km nad powierzchnią Ziemi. Podczas spaceru w otwartej przestrzeni nastąpiło nieprzewidziane wydarzenie, po którym astronauta oddzielił się od stacji i zaczął poruszać się względem niej z prędkością początkową $\Delta v = 5$ m/s prostopadle do wektora Δv_o prędkości orbitalnej stacji.

Przedyskutuj, jakie są szanse uratowania astronauty. Jakie znaczenie ma założenie o prostopadłości wektora Δv do orbity.

Przyjmij, że dostępne aparaty odrzutowe mogą rozpędzić astronautę jedynie do prędkości 3 m/s.

2. W dniu 19 września 1903 roku Tadeusz Banachiewicz (1882–1954) zaobserwował bardzo rzadkie zjawisko zakrycia gwiazdy BD -6°6191 przez Jowisza.

Oszacuj, jak często (średnio) w danym miejscu na Ziemi można zaobserwować zakrycie przez Jowisza gwiazdy jaśniejszej niż 7 wielkość gwiazdowa. Przyjmij, że na całej sferze niebieskiej jest widocznych n gwiazd jaśniejszych od 7 wielkości gwiazdowej ($n = 8240$).

3. Jedna z gwiazd pewnej gromady ruchomej jest oddalona od apeksu gromady o $\vartheta = 42°$, ma prędkość radialną $v_r = 12$ km/s i roczny ruch własny $\mu = 0\overset{''}{,}09$. Określ odległość do tej gwiazdy i wartość jej wektora prędkości.

Wskazówki: wektory prędkości gwiazd gromady ruchomej są równoległe do kierunku apeksu tej gromady.

4. W wysokiej temperaturze, w stanie równowagi termodynamicznej cząstki powstają i giną tak, by ich ilość N na jednostkę objętości była stała. W niezbyt wysokich temperaturach, w których cząstki można traktować nierelatywistycznie, liczba ta jest opisana rozkładem Maxwella-Boltzmanna $N = A(mc^2)^{\frac{3}{2}} e^{\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right)}$, gdzie m jest masą cząstki, k_B stałą Boltzmanna, T – temperaturą, natomiast A – pewną stałą o znanej wartości.

W trakcie ewolucji Wszechświata liczba protonów i neutronów była kształtowana w reakcji $n \leftrightarrow p + e + \nu + E$, podczas której neutrony przechodzą w protony i na odwrót. W powyższej reakcji oznaczają odpowiednio neutron, proton, elektron, neutrino i energię wydzielającą się przy rozpadzie neutronu.

Równowaga termodynamiczna w odniesieniu do liczby neutronów i protonów utrzymuje się tak długo, jak długo energia kinetyczna cząstek umożliwia przechodzenie protonów w neutrony.

Zakładając, że elektronów i neutrin w mieszaninie nie brakuje, oraz że wszystkie neutrony istniejące w momencie, gdy równowaga termodynamiczna zostanie naruszona, zostaną związane w jądra helu, oszacuj stosunek ilości wodoru do helu we Wszechświecie.

Dane: Dla ułatwienia obliczeń wszystkie potrzebne dane przeliczono do jednolitych jednostek, tj. zarówno masa, jak i energia została podana w megaelektronowoltach ($1\ \mathrm{eV} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J).
masa protonu – 938,256 MeV,
masa neutronu – 939,550 MeV,
masa elektronu – 0,511 MeV,
stała Boltzmanna – $8{,}6 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.

Uwagi:

1. Aby obliczyć potrzebne gęstości cząstek, trzeba znaleźć temperaturę, w której ustaje reakcja powstawania neutronów, a tym samym kończy się równowaga termodynamiczna. Dla celów oszacowania przyjmij, że reakcja praktycznie ustaje, gdy energia, potrzebna do zajścia reakcji, jest równa $k_B T$, a więc 2/3 średniej energii kinetycznej cząsteczek. Przyjmij również, że energię związaną z neutrinem można pominąć.

2. Wynik otrzymany przy powyższych założeniach jest oczywiście oszacowaniem, bo pominięto wiele istotnych procesów i zjawisk. Między innymi fakt, że reakcja nie ustała dokładnie, gdy średnia energia kinetyczna cząstek spadła poniżej 2/3 energii reakcji. Również powstawanie jąder helu nie jest procesem natychmiastowym oraz nie wszystkie neutrony znalazły się w cząstkach α. Pewna liczba neutronów rozpadła się, zanim zostały związane w jądro helu. Mimo to oszacowanie jest zupełnie niezłe, choć nie należy zapominać, że jest to tylko oszacowanie od góry, w rzeczywistości helu powinno być mniej.

5. Aparatura planetarium odtworzy wygląd nieba widoczny z pewnego miejsca w Układzie Słonecznym. Określ możliwie dokładnie obserwowaną sytuację, datę oraz usytuowanie hipotetycznego obserwatora. (Odtworzono zaćmienie Słońca przez Ziemię z 17 października 2005 r. z pozycji obserwatora na Księżycu).

6. Na podstawie dat opozycji, kształtów, rozmiarów i położenia pętli zakreślanych na niebie przez Marsa w pobliżu opozycji (mapki znajdują się na stronie www.planetarium.chorzow.net.pl) oraz odległości Ziemia–Mars oszacuj wartości elementów orbity marsjańskiej przy założeniu, że orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu 149,6 mln km.
Daty opozycji Marsa, odległość Marsa od Ziemi [mln km], długość i szer. ekliptyczna[°]:

L.p.	opozycja	odl.	dł.	szer.
1	25.02.1980	101,2	156,1	4,37
2	31.03.1982	95,3	190,8	2,99
3	11.05.1984	80,4	231,2	−0,12
4	10.07.1986	60,6	287,9	−5,51
5	28.09.1988	59,1	5,4	−4,57
6	27.11.1990	78,2	65,8	1,42
7	07.01.1993	93,8	108,1	4,01
8	12.02.1995	100,9	142,8	4,54
9	17.03.1997	98,7	176,9	3,69
10	24.04.1999	87,2	214,4	1,37
11	13.06.2001	68,1	262,9	−3,23
12	28.08.2003	55,5	335,2	−6,64
13	07.11.2005	70,3	45,0	−0,48
14	24.12.2007	88,6	92,8	3,32
15	29.01.2010	99,2	130,0	4,52
16	03.03.2012	100,7	163,8	4,18
17	08.04.2014	92,8	199,0	2,49
18	22.05.2016	76,2	241,7	−1,14
19	27.07.2018	57,5	303,9	−6,47

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce (ex aequo):

Radosław CHRAPKIEWICZ, V LO w Bielsku-Białej, naucz. mgr Ewa Gajda

Szymon JĘDRZEJEWSKI, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, naucz. mgr Marek Golka

II miejsce: Piotr CZARNIK, II LO im.płk Leopolda Lisa-Kuli w Rzeszowie, naucz. mgr Jerzy Mackiewicz

III miejsce: Marcin GRONOWSKI, II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu, naucz. mgr Tatiana Napieralska-Dąbrowska

IV miejsce: Karol WĘDOŁOWSKI, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku, naucz. mgr Mariusz Sobczak

Finaliści

V miejsce: Daniel HANS, L LO im. Ruy Barbosa w Warszawie, naucz. Aleksandra Miłosz

VI miejsce: Jacek RONDIO, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi, naucz. Andrzej Sperka

VII miejsce: Radosław KONIECZNY, V LO im. Adama Asnyka w Szczecinie, naucz. mgr Janusz Jura

VIII miejsce: Krzysztof GAWRYLUK, II LO im. Hetmana Jan Zamoyskiego w Lublinie, naucz. mgr Elżbieta Wójtowicz

IX miejsce: Michał JANUSZEWSKI, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach, naucz. mgr Bogusław Lanuszny

X miejsce: Anna SZARLA, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach, naucz. mgr Józef Greupner

XI miejsce: Krystyna MACIOSZEK, V LO im. Krzysztofa Kieślowskiego w Zielonej Górze, naucz. mgr Urszula Kobus

XII miejsce: Rafał SZEPIETOWSKI, III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni, naucz. mgr Ewa Skrzypczak

oraz

Kamil KONERA, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim, naucz. mgr Antonina Szemberg

Łukasz MEJŁUN, LO im. K. K. Baczyńskiego we Włocławku, naucz. mgr Zbigniew Wawrzonkoski

Karolina SOŁTYS, I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie, naucz. mgr Kamil Kamiński

Paweł ŻUK, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, naucz. mgr Marian Bąk