Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2005

Zadania z matematyki nr 503, 504

Redaguje Marcin E. KUCZMA

503. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią a, dla której zachodzi implikacja: Jeżeli funkcja $f\colon \langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ spełnia warunki $f(1)=1$ oraz

$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y) \qquad \text{dla } x\in\langle 0;1\rangle,\ \ y\in\langle 0;1-x\rangle,$$

to $f(x)\leqslant ax$ dla $x\in\langle 0;1\rangle$.

504. Gra: odgadywanie liczby. Przeciwnik wybiera liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,15\}$. Mamy prawo zadać 7 pytań, oczekując odpowiedzi *Tak* lub *Nie*. Przeciwnik na wszystkie pytania odpowiada; wolno mu przy tym skłamać, ale co najwyżej jeden raz. Podać taktykę gwarantującą prawidłowe rozpoznanie wybranej liczby.

Zadanie 504 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2005

Przypominamy treść zadań:

495. Wyznaczyć zbiór tych liczb wymiernych dodatnich, które można przedstawić w postaci ułamka $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ dla pewnych liczb naturalnych a, b, c, d.

496. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie BIC w punktach I i D; prosta BI przecina okrąg opisany na trójkącie CIA w punktach I i E; prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie AIB w punktach I i F. Wyznaczyć największą możliwą wartość iloczynu $\dfrac{|AI|}{|AD|}\cdot\dfrac{|BI|}{|BE|}\cdot\dfrac{|CI|}{|CF|}$.

495. Wykażemy, że *każda* dodatnia liczba wymierna ma przedstawienie wymaganej postaci. Weźmy dowolną liczbę wymierną $x>0$.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy $1<x<2$; tak więc $x=m/n$ $(m,n\in\mathbb{N})$, $n<m<2n$. W tym przypadku wystarczy przyjąć

$$a=c=m+n,\quad b=2m-n,\quad d=2n-m;$$

wówczas $a+b=3m$, $ab=2m^2+mn-n^2$,

$$a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=3m(3m^2-3mn+3n^2),$$

podobnie wyrażamy c^3+d^3 i otrzymujemy

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=\frac{3m(3m^2-3mn+3n^2)}{3n(3n^2-3nm+3m^2)}=x.$$

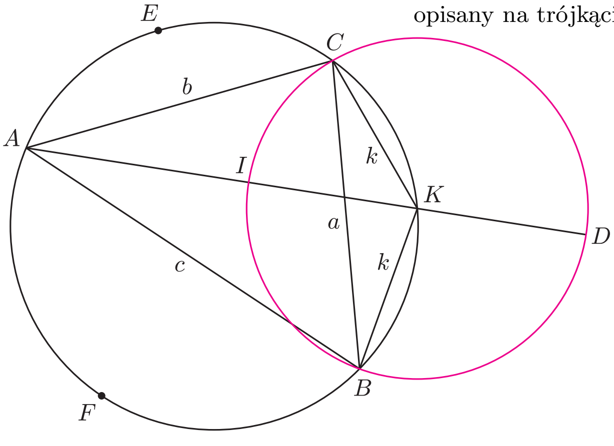
W przypadku ogólnym, gdy x jest dowolną liczbą wymierną dodatnią, znajdujemy liczbę wymierną $y=k/\ell$ taką, że $1<xy^3<2$. W myśl konkluzji poprzedniego przypadku liczba xy^3 daje się zapisać jako ułamek

$$\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3};\qquad A,B,C,D\in\mathbb{N}.$$

Stąd dostajemy żądane przedstawienie liczby x:

$$x=\frac{1}{y^3}\cdot\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3}=\frac{(A\ell)^3+(B\ell)^3}{(Ck)^3+(Dk)^3}.$$

496. Punkt K,w którym prosta AI przecina ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC, jest środkiem łuku BC, więc cięciwy KB, KC mają równą długość k. Tę samą długość ma też odcinek KI (fakt znany lub łatwy do udowodnienia). Zatem okrąg opisany na trójkącie BIC ma środek w punkcie K, a odcinek ID jest jego średnicą.



Twierdzenie Ptolemeusza, zastosowane do czworokąta $ABKC$, daje równość $|AK|\cdot a=bk+ck$ (gdzie jak zwykle a, b, c to długości boków trójkąta ABC). Stąd

$$\frac{|AI|}{|AD|}=\frac{|AK|-|KI|}{|AK|+|KI|}=\frac{\dfrac{bk+ck}{a}-k}{\dfrac{bk+ck}{a}+k}=\frac{b+c-a}{b+c+a}$$

i z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną trójki liczb wynika, że

$$\frac{|AI|}{|AD|}\cdot\frac{|BI|}{|BE|}\cdot\frac{|CI|}{|CF|}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{c+a-b}{c+a+b}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{27}.$$

Ponieważ dla trójkąta równobocznego zachodzi równość, szukane maksimum wynosi $1/27$.