Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 733 ($WT = 1{,}48$) i 734 ($WT = 2{,}11$) z numeru 1/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,43
Roksana Słowik	Knurów	39,15
Adam Dzedzej	Gdańsk	39,12
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,78
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jerzy Cisło	Wrocław	34,72
Marcin Kasperski	Warszawa	34,38
Janusz Olszewski	Warszawa	30,15

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2017

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

739. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
- dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ ciąg (x_n) określony wzorami $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) jest ciągiem arytmetycznym.

740. Obliczyć kres dolny wartości sumy
$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}\,,$$
gdy x, y, z mogą być dowolnymi liczbami dodatnimi, spełniającymi warunek $x+y+z=1$.

739. Niech f będzie funkcją, spełniającą postawione warunki, i przyjmijmy, że funkcja $g(x) = f(x) - x$ nie jest stała. Istnieją więc liczby $a, b \in \mathbb{R}$ dla których $c = g(a) > d = g(b)$. W drugim z warunków, podanych w zadaniu, przyjmujemy $a = x_0$ i tworzymy ciąg arytmetyczny $(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (a, f(a), ff(a), \ldots)$. Skoro $f(a) = a + c$, zatem $x_n = a + nc$ (dla wszystkich n). Jednocześnie $f(x_n) = x_{n+1} = a + (n+1)c$, czyli

$$(1)\qquad f(a+nc) = a + (n+1)c \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Analogicznie

$$(2)\qquad f(b+nd) = b + (n+1)d \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

W myśl pierwszego z podanych warunków,
$$|f(a+nc) - f(b+nd)| \leqslant |(a+nc) - (b+nd)| = |a - b + n(c-d)|.$$

Po lewej stronie wstawiamy wyrażenia (1), (2) i dostajemy nierówności

$$(3)\qquad |a - b + (n+1)(c-d)| \leqslant |a - b + n(c-d)| \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Dla dużych n wyrażenia ujęte w symbol wartości bezwzględnej mają wartość dodatnią (bo $c - d > 0$). Można więc opuścić moduły. Ale zależność (3) – po skasowaniu modułów – redukuje się do postaci $c - d \leqslant 0$; sprzeczność.

W konsekwencji funkcja $f(x) - x$ musi być stała. Jasne, że każda funkcja postaci $f(x) = x + C$ spełnia wymagane warunki.

740. Ustalmy liczby $x, y, z > 0$ o sumie równej 1. Funkcja $t \mapsto 1/t$ jest wypukła w przedziale $(0, \infty)$. Stosujemy do niej nierówność Jensena dla trójki punktów $1/(y^2+z^2)$, $1/(z^2+x^2)$, $1/(x^2+y^2)$ z wagami x, y, z:
$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}\right)^{-1} &\\
\leqslant x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) &= \\
= xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) &= \\
= xy(1-z) + yz(1-x) + zx(1-y) &= \\
= xy + yz + zx - 3xyz.&
\end{aligned}$$

Można przyjąć, że $x \geqslant y$ oraz $x \geqslant z$. Wówczas $x \geqslant 1/3$ oraz
$$xy + yz + zx - 3xyz = x(y+z) + yz(1-3x) \leqslant \leqslant x(y+z) = x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}\,.$$

W ostatnim szacowaniu pierwsza nierówność staje się równością tylko dla $x = 1/3$, zaś druga – tylko dla $x = 1/2$. Stąd wniosek, że
$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} > 4 \qquad \text{dla} \quad x, y, z > 0.$$

Gdyby dopuścić trójki liczb x, y, z, wśród których jedna jest zerem, rozważana suma nadal miałaby sens oraz przyjęłaby wartość 4 dla $x = y = 1/2$, $z = 0$. Przy założeniu, że $x, y, z > 0$, wartość 4 jest (jak widać) nieosiągalna; ale jest granicą badanej sumy np. dla $x = y = (1-z)/2$, gdy $z \to 0$. Jest więc jej kresem dolnym.