Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2017

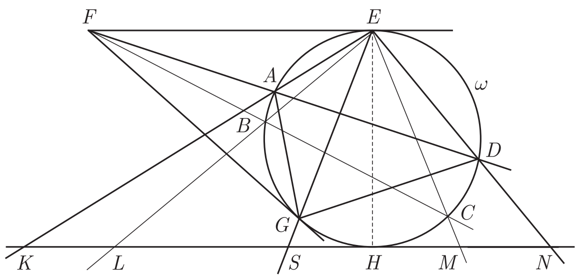
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

737. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg ω, przy czym proste BC i AD przecinają się w takim punkcie F, że prosta EF jest styczna do ω. Druga prosta styczna do okręgu ω, równoległa do EF, przecina proste EA, EB, EC, ED odpowiednio w punktach K, L, M, N. Udowodnić, że odcinki KL i MN mają jednakową długość.

738. Wypisując, jedna za drugą, wszystkie liczby całkowite dodatnie, mające (w systemie dziesiętnym) co najwyżej n cyfr, piszemy łącznie c_n cyfr (np. $c_1 = 9$, $c_2 = 189$); w tym z_n zer (np. $z_1 = 0$, $z_2 = 9$). Czy równość $z_n = c_{n-1}$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 2$?

737. Prowadzimy z punktu F prostą różną od FE, styczną do okręgu ω w punkcie G. Prosta przechodząca przez punkty K, L, M, N jest styczna do okręgu w punkcie H i przecina prostą EG w punkcie S. Pokażemy, że S jest środkiem odcinka KN.



Ponieważ

$$|\sphericalangle EKS| = 90^\circ - |\sphericalangle HEA| = |\sphericalangle EHA| = |\sphericalangle EGA|,$$

uzyskujemy podobieństwa

$$\triangle EKS \sim \triangle EGA; \quad \text{i analogicznie} \quad \triangle ENS \sim \triangle EGD.$$

Stąd wynikają proporcje $|KS| : |GA| = |ES| : |EA|$ oraz $|NS| : |GD| = |ES| : |ED|$; a z nich –

$$(1) \qquad \frac{|KS|}{|NS|} = \frac{|GA| \cdot |ED|}{|EA| \cdot |GD|}.$$

Dalej, zauważamy kolejne pary trójkątów podobnych (odpowiednie kąty równe):

$$\triangle EDF \sim \triangle AEF \qquad \text{oraz} \qquad \triangle AGF \sim \triangle GDF.$$

To daje proporcje $|ED| : |EA| = |DF| : |EF|$ oraz $|GA| : |GD| = |GF| : |DF|$, z których wynika, że prawa strona wzoru (1) jest równa $|GF| : |EF|$, czyli 1.

Punkty K, L leżą po jednej stronie punktu S; punkty M, N po drugiej. Uzyskana równość $|KS| : |NS| = 1$ oznacza, że S jest środkiem odcinka KN. Przez analogię, ten sam punkt S jest też środkiem odcinka LM. Stąd wniosek, że odcinki KL i MN są przystające.

738. Różnica $c_n - c_{n-1}$ to liczba cyfr użytych do zapisania wszystkich liczb n-cyfrowych. Jest tych liczb $10^n - 10^{n-1}$, czyli $9 \cdot 10^{n-1}$; zatem $c_n = c_{n-1} + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$. W zapisie każdej z nich cyfra wiodąca jest różna od zera; po jej odrzuceniu, pozostała część zapisu to *dowolny* ciąg długości $n-1$, złożony z *dowolnych* cyfr (formalnie – słowo z alfabetu 10-elementowego).

Jest tych słów $9 \cdot 10^{n-1}$, jest w nich więc $(n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$ cyfr, a wszystkie cyfry są równouprawnione. Dziesiąta część spośród nich to zera. To znaczy, że w zapisie wszystkich liczb n-cyfrowych mamy $(n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$ zer. Tak więc $z_n = z_{n-1} + (n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$. Pisząc $c'_n = z_{n+1}$ widzimy, że ciągi (c_n) i (c'_n) spełniają identyczną zależność rekurencyjną. Ponieważ $c'_1 = z_2 = 9 = c_1$, wynika stąd, że $c'_n = c_n$ (dla $n \geqslant 1$), czyli $z_n = c_{n-1}$ (dla $n \geqslant 2$).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 731 ($WT = 3{,}13$) i 732 ($WT = 1{,}78$) z numeru 12/2016

Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,39
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	37,77
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68
Marcin Małogrosz	Warszawa	35,19
Jerzy Cisło	Wrocław	31,28
Marcin Kasperski	Warszawa	30,79