Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2017

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 729 ($WT = 2{,}34$) i 730 ($WT = 1{,}87$) z numeru 11/2016

Marek Spychała	Warszawa	45,09
Zbigniew Skalik	Wrocław	44,50
Witold Bednarek	Łódź	44,19
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	35,99
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68

No i odnotowujemy trzy jednoczesne przejścia magicznej linii 44 p. Z tej trójki nikt nie jest nowicjuszem: **Marek Spychała** – po raz drugi; **Zbigniew Skalik** – po raz trzeci – mamy więc kolejnego Weterana; wszelako tytuł ten, choć nobliwy, blednie, gdy spojrzymy na staż samego *uczestnictwa* w Lidze: **Witold Bednarek**, obecny w Lidze od roku 1981(!) właśnie zamyka siódme okrążenie.

Zadania z matematyki nr 743, 744

Redaguje Marcin E. KUCZMA

743. W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy działanie: $x\diamondsuit y = (x/y) + (y/x)$. Niech a, b, c, d będą liczbami, spełniającymi równanie

$$(a\diamondsuit b) + (b\diamondsuit c) + (c\diamondsuit d) + (d\diamondsuit a) = (a\diamondsuit c) + (b\diamondsuit d) + ((ac)\diamondsuit(bd)) + 2.$$

Czy a, b, c, d mogą być czterema różnymi liczbami? Czy mogą być wśród nich trzy różne liczby?

744. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech M będzie takim zbiorem dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary różnych liczb $m, n \in M$ zachodzi nierówność $mn \leqslant k^2|m-n|$. Wykazać, że zbiorze M jest nie więcej niż $2k-1$ liczb. Czy dla każdej liczby $k \geqslant 2$ istnieje $(2k{-}1)$-elementowy zbiór M o podanej własności?

Zadanie 744 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2017

Przypominamy treść zadań:

735. Dana jest liczba dodatnia $a < 1$. Obliczyć kres górny zbioru wartości wyrażenia $a^{\operatorname{tg}\alpha} + a^{\operatorname{ctg}\alpha}$, gdy zmienna α przebiega przedział $(0, \pi/2)$.

736. Rozważamy słowa binarne (ciągi zerojedynkowe) długości n. Niech A_n będzie liczbą takich słów, w których nie pojawia się blok 010, zaś B_n liczbą takich słów, w których w żadnym miejscu blok 00 nie sąsiaduje z blokiem 11. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyznaczyć wartość stosunku A_n/B_{n+1}.

735. Gdy α przebiega przedział $(0, \pi/2)$, wartość $\operatorname{tg}\alpha$ przebiega zbiór wszystkich liczb dodatnich. Należy więc znaleźć kres górny funkcji $f(x) = a^x + a^{1/x}$ zmiennej $x \in (0, \infty)$. Ponieważ $f(x) = f(1/x)$, kres górny na przedziale $(0, \infty)$ jest taki sam, jak na przedziale $[1, \infty)$. Pochodna funkcji f ma po prostym przekształceniu postać

$$f'(x) = \big(-a^x \ln a\big)\big(x^{-2}a^{\varphi(x)} - 1\big), \qquad \text{gdzie} \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - x.$$

Skoro $a < 1$, czynnik w pierwszym nawiasie jest stale dodatni. Czynnik w drugim nawiasie ma taki sam znak jak wyrażenie

$$g(x) = \ln\big(x^{-2}a^{\varphi(x)}\big) = -2\ln x + \big(\ln a\big)\Big(\frac{1}{x} - x\Big).$$

Teraz badamy funkcję g w przedziale $[1, \infty)$. Jej pochodna:

$$g'(x) = \big(-x^{-2}\ln a\big)\Big(x^2 + \frac{2}{\ln a}\cdot x + 1\Big).$$

I znów, czynnik w pierwszym nawiasie jest dodatni. W drugim nawiasie widzimy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (rzeczywiste lub nie) mają iloczyn równy 1; w przedziale $(1, \infty)$ może być co najwyżej jeden pierwiastek. Dla dużych x trójmian ma wartości dodatnie. Zatem wartości $g'(x)$ albo są dodatnie w całym przedziale $(1, \infty)$, albo są – przedziałami – najpierw ujemne, potem dodatnie. Funkcja g jest więc albo rosnąca, albo (kolejno) malejąca–rosnąca. A ponieważ $g(1) = 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, wynika stąd, że także wartości $g(x)$ są albo stale dodatnie, albo (przedziałami, od lewej) ujemne–dodatnie.

Funkcja g ma taki znak, jak f', wobec czego możemy powtórzyć rozumowanie: funkcja f jest albo rosnąca, albo (kolejno) malejąca–rosnąca. W każdym przypadku jej kresem górnym na przedziale $[1, \infty)$ jest jej wartość lub granica w jednym z końców przedziału. Otrzymujemy wynik:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} f(x) = \sup_{x\in[1,\infty)} f(x) = \max\{f(1), \lim_{x\to\infty} f(x)\} = \max\{2a, 1\}.$$

736. Słowu $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ długości $n+1$ przyporządkujmy słowo $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ długości n, przyjmując $y_i = |x_i - x_{i-1}|$. Znając słowo Y oraz element x_0, jednoznacznie odtwarzamy słowo X.

Obecność bloku 010 w słowie Y oznacza obecność bloku 0011 lub 1100 w słowie X, i na odwrót. Liczba słów X bez bloków 0011, 1100, z elementem początkowym $x_0 = 0$, jest taka sama, jak tych z elementem początkowym $x_0 = 1$; i jest, w myśl poprzedniego spostrzeżenia, taka sama, jak liczba słów Y bez bloku 010. Stąd wniosek, że $B_{n+1} = 2A_n$.