Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2017

Zadania z matematyki nr 741, 742

Redaguje Marcin E. KUCZMA

741. Niech W będzie wielościanem wypukłym, środkowo-symetrycznym, i niech π będzie ustaloną płaszczyzną, przechodzącą przez środek symetrii. Przekrój wielościanu W płaszczyzną π jest zawarty w kole o promieniu r. Udowodnić, że przekrój wielościanu W każdą płaszczyzną, równoległą do π, jest zawarty w pewnym kole o promieniu r – lub podać przykład, pokazujący nieprawdziwość takiego stwierdzenia.

742. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 4k+1$. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia s, mniejsza od p, dla której różnica $sp - \lfloor\sqrt{sp}\rfloor^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

Zadanie 742 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 727 ($WT = 3{,}22$) i 728 ($WT = 1{,}60$) z numeru 10/2016

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Witold Bednarek	Łódź	42,32
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,22
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	31,78

Rozwiązania zadań z numeru 1/2017

Przypominamy treść zadań:

733. Wierzchołek czworościanu nazwijmy *ciekawym*, jeśli z trzech wychodzących zeń krawędzi nie da się zbudować trójkąta.
(a) Czy istnieje czworościan, którego wszystkie wierzchołki są ciekawe?
(b) Czy istnieje czworościan, mający dokładnie jeden ciekawy wierzchołek?

734. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $p, q, a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} a_{k+1}^{-q} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^p \qquad (\text{przyjmujemy } a_{n+1} = a_1).$$

733. (a) Weźmy dowolny czworościan oraz jego najdłuższą krawędź. Przyjmijmy, że ma ona długość a, zaś dwie przyległe do niej ściany mają krawędzie długości a, b, c oraz a, d, e, przy czym krawędzie a, b, e mają wspólny koniec oraz krawędzie a, c, d mają wspólny koniec. Wówczas $a < b + c$ oraz $a < d + e$; stąd $2a < b + c + d + e$, wobec czego musi zachodzić co najmniej jedna z nierówności $a < b + e$ lub $a < c + d$. Zatem co najmniej jeden z końców krawędzi a nie jest wierzchołkiem ciekawym.

(b) Dokładnie jeden wierzchołek ciekawy jest możliwy. Rozpocznijmy od przykładu czworościanu zdegenerowanego do czwórki punktów na płaszczyźnie w konfiguracji: ABC – trójkąt prostokątny; D – środek przeciwprostokątnej AB; $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = |BD| = c$, przy czym $a < c < b < 2a$ (np. $a = 16$, $b = 30$, $c = 17$). Z punktu A wychodzą krawędzie długości $b, c, 2c$; z punktu C: a, b, c; z punktu D: c, c, c; każda z tych trójek spełnia warunek trójkąta. Pozostaje wierzchołek B – jedyny ciekawy (wspólny koniec krawędzi $a, c, 2c$). Teraz wystarczy wyjść w przestrzeń i nieznacznie przemieścić wierzchołek D, usuwając go prostopadle z płaszczyzny ABC. Wychodzące zeń krawędzie trochę się wydłużą. Przy małym przemieszczeniu rozważane nierówności (ostre) pozostaną w mocy; punkt B nadal będzie jedynym wierzchołkiem ciekawym.

734. W nierówności Bernoulliego $(1+t)^{\alpha+1} \geqslant 1 + (\alpha+1)t$ (słusznej dla $t \geqslant -1$, $\alpha \geqslant 0$) wykonujemy „przesunięcie zmiennej” $1 + t = x$, uzyskując postać

$$x^{\alpha+1} \geqslant (\alpha+1)x - \alpha \qquad (\text{dla } x \geqslant 0,\ \ \alpha \geqslant 0).$$

Podstawiając $\alpha = q/p$ oraz $x = (a_k/a_{k+1})^p$, dostajemy

$$\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^{p+q} \geqslant \frac{p+q}{p}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^p - \frac{q}{p} \qquad (\text{dla } k = 1, \ldots, n).$$

Mnożymy stronami przez a_{k+1}^p, otrzymując

$$\frac{a_k^{p+q}}{a_{k+1}^q} \geqslant \left(1 + \frac{q}{p}\right)a_k^p - \frac{q}{p}\,a_{k+1}^p.$$

Suma tych nierówności (dla $k = 1, \ldots, n$) to teza zadania.