Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2017

Zadania z matematyki nr 737, 738

Redaguje Marcin E. KUCZMA

737. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg ω, przy czym proste BC i AD przecinają się w takim punkcie F, że prosta EF jest styczna do ω. Druga prosta styczna do okręgu ω, równoległa do EF, przecina proste EA, EB, EC, ED odpowiednio w punktach K, L, M, N. Udowodnić, że odcinki KL i MN mają jednakową długość.

738. Wypisując, jedna za drugą, wszystkie liczby całkowite dodatnie, mające (w systemie dziesiętnym) co najwyżej n cyfr, piszemy łącznie c_n cyfr (np. $c_1 = 9$, $c_2 = 189$); w tym z_n zer (np. $z_1 = 0$, $z_2 = 9$). Czy równość $z_n = c_{n-1}$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 2$?

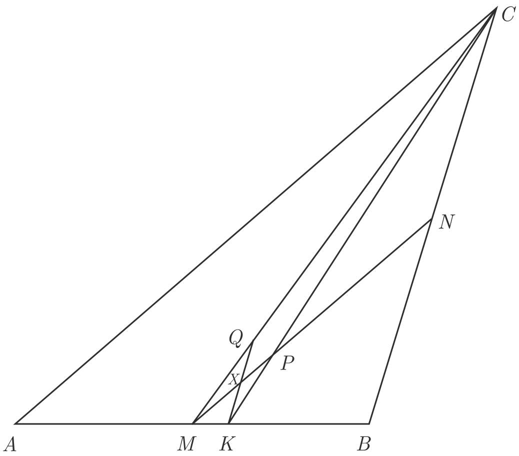
Zadanie 738 zaproponował pan Bartłomiej Pawlik z Limanowej.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2016

Przypominamy treść zadań:

729. W trójkącie ABC bok AC jest dłuższy niż BC. Punkt P leży na dwusiecznej CK kąta C, zaś punkt Q leży na środkowej CM, połowiącej bok AB; przy tym $MP \| AC$ oraz $KQ \| BC$. Wykazać, że odcinek PQ jest prostopadły do CK.

730. Wyznaczyć kres dolny zbioru liczb postaci $n\{n\sqrt{2}\}$ gdy $n = 1, 2, 3, \ldots$ (tradycyjne oznaczenie: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).



729. Oznaczmy przez X punkt przecięcia przekątnych czworokąta $KPQM$. Prosta MP, równoległa do AC, przecina bok BC w punkcie N, będącym środkiem tego boku. Skoro ów bok jest równoległy do KQ, zatem punkt X (leżący na prostej MN) jest środkiem odcinka KQ.

Z danych równoległości dostajemy ponadto równość kątów
$$|\sphericalangle PKX| = |\sphericalangle KCB| = |\sphericalangle KCA| = |\sphericalangle KPX|.$$
Trójkąt XKP jest więc równoramienny: $|KX| = |PX|$. Punkt X, jako środek odcinka KQ, jest w takim razie środkiem okręgu opisanego na trójkącie KPQ. Wynika stąd, że kąt KPQ jest prosty – a to teza zadania.

730. Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 1$ i oznaczmy $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor = k$. Oczywiście $k < n\sqrt{2}$, czyli $k^2 < 2n^2$, zatem $2n^2 - k^2 \geqslant 1$. Dostajemy oszacowanie
$$n\{n\sqrt{2}\} = n(n\sqrt{2} - k) = \frac{n(2n^2 - k^2)}{n\sqrt{2} + k} \geqslant \frac{n}{n\sqrt{2} + k} >$$
$$> \frac{n}{n\sqrt{2} + n\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
Uzyskane ograniczenie dolne okaże się być szukanym kresem dolnym. Pierwsza z powyższych nierówności staje się równością, gdy $2n^2 - k^2 = 1$; druga będzie „bliska równości”, gdy stosunek $k/n\sqrt{2}$ będzie bliski 1.

Wskażemy nieskończony ciąg rozwiązań (n, k) równania $2n^2 - k^2 = 1$. Para $(1, 1)$ jest rozwiązaniem. Dalej, jeśli para (n, k) jest rozwiązaniem, to $(n', k') = (3n + 2k, 4n + 3k)$ też, bowiem
$$2(n')^2 - (k')^2 = 2(9n^2 + 12nk + 4k^2) - (16n^2 + 24nk + 9k^2) =$$
$$= 2n^2 - k^2.$$
Istnieją więc rozwiązania (n, k) z dowolnie wielką wartością n. Gdy (n, k) jest dowolną z takich par, wówczas $k < n\sqrt{2} < k + 1$, czyli $k = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, wobec czego (zgodnie z początkowym przekształceniem)
$$n\{n\sqrt{2}\} = \frac{n(2n^2 - k^2)}{n\sqrt{2} + k} = \frac{n}{n\sqrt{2} + k} <$$
$$< \frac{n}{n\sqrt{2} + (n\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2} - (1/n)}.$$
Liczba n może być dowolnie wielka, zatem ostatnie wyrażenie może mieć wartość dowolnie bliską $1/(2\sqrt{2})$. To dowodzi, że istotnie liczba $1/(2\sqrt{2})$ jest kresem dolnym zbioru wartości $n\{n\sqrt{2}\}$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 622 ($WT = 3{,}4$), 623 ($WT = 1{,}72$) 624 ($WT = 2{,}5$), 625 ($WT = 3{,}6$) z numerów 9/2016 i 10/2016

Michał Koźlik	Gliwice	39,32
Marian Łupieżowiec	Knurów	37,97
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	31,58
Jacek Konieczny	Poznań	29,51