Zadania z matematyki nr 735, 736

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2017

735. Dana jest liczba dodatnia $a < 1$. Obliczyć kres górny zbioru wartości wyrażenia $a^{\operatorname{tg}\alpha} + a^{\operatorname{ctg}\alpha}$, gdy zmienna α przebiega przedział $(0, \pi/2)$.

736. Rozważamy słowa binarne (ciągi zerojedynkowe) długości n. Niech A_n będzie liczbą takich słów, w których nie pojawia się blok 010, zaś B_n liczbą takich słów, w których w żadnym miejscu blok 00 nie sąsiaduje z blokiem 11. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyznaczyć wartość stosunku A_n/B_{n+1}.

Zadanie 736 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2016

Przypominamy treść zadań:

727. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkącików o boku 1. Każdy wierzchołek powstałej siatki (tj. wierzchołek któregoś trójkącika) jest pomalowany na biało lub czarno. Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu zmieniamy kolor wszystkich wierzchołków, leżących na jednej linii prostej, zawierającej bok któregoś trójkącika.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których – wychodząc od stanu: wszystkie wierzchołki białe – można dojść do stanu: dokładnie jeden wierzchołek czarny.

728. Czy istnieje funkcja różniczkowalna f, będąca różnowartościowym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb dodatnich na ten sam zbiór, i taka, że jej pochodna jest funkcją odwrotną do f?

727. Dla $n = 2$ wskazany cel da się osiągnąć. W trzech ruchach wybieramy proste zawierające boki dużego trójkąta. Jego wierzchołki pozostaną białe (każdy zmieni kolor dwukrotnie), zaś środki boków staną się czarne. Teraz w jednym ruchu zmieniamy kolor dwóch z tych środków z powrotem na biały. Pozostaje jeden punkt czarny.

Także dla $n = 3$ można uzyskać wymagany stan. Jak poprzednio, w trzech ruchach bierzemy proste, zawierające boki dużego trójkąta. Jego wierzchołki i jego środek staną się białe, pozostałe punkty siatki staną się czarne. W kolejnych trzech ruchach bierzemy proste równoległe do boków dużego trójkąta i przechodzące przez jego środek. Czarne punkty wybielą się, a punkt w środku się zaczerni.

Natomiast dla $n > 3$ nie da się! W trójce punktów, będących wierzchołkami dużego trójkąta, po każdym ruchu jest parzysta liczba czarnych punktów (0 lub 2). Żaden z tej trójki nie może więc być owym punktem, który w pewnym momencie miałby stać się jedynym czarnym.

Każdy inny punkt siatki jest elementem pewnej szóstki punktów, tworzących sześciokąt foremny o boku 1. Również i w takiej szóstce każdy ruch powoduje zmianę koloru dokładnie dwóch punktów, więc niezmiennie jest w niej parzysta liczba czarnych punktów (0, 2, 4, 6). Pojedynczy czarny punkt pojawić się nie może.

728. Spróbujmy poszukać rozwiązania wśród funkcji postaci $f(x) = Ax^p$ (motywacja: zarówno pochodna, jak i funkcja odwrotna do takiej funkcji, też ma taką postać – próba ma szansę powodzenia). Gdy stałe A, p są dodatnie, funkcja $f(x) = Ax^p$ jest ściśle rosnąca i przekształca przedział $(0, \infty)$ na ten sam przedział. Dla ustalonej wartości $x > 0$ rozwiązujemy równanie $f(t) = x$ (z niewiadomą t), otrzymując $t = A^{-1/p}x^{1/p}$. Tak więc

$$f^{-1}(x) = A^{-1/p}x^{1/p}; \qquad \text{ponadto} \quad f'(x) = Ap\,x^{p-1}.$$

Aby funkcje f^{-1} i f' były identyczne, wystarczy, by parametry dodatnie A, p spełniały równania

$$A^{-1/p} = Ap, \qquad \frac{1}{p} = p - 1.$$

Drugie równanie ma w liczbach dodatnich jedyne rozwiązanie $p = (\sqrt{5} + 1)/2$. Dla tej stałej p pierwsze równanie przybiera formę $A^{1-p} = Ap$, z rozwiązaniem $A = p^{-1/p} = p^{1-p}$. Funkcja $f(x) = Ax^p$ z tymi parametrami ma wymaganą własność.

[Dla dociekliwych – pytanie: czy to jedyna taka funkcja? Jeśli nie – jak znaleźć wszystkie?]

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2015/16

Marek Spychała	1–42,75
Tomasz Wietecha	10–42,11
Witold Bednarek	6–38,72
Franciszek S. Sikorski	1–38,08
Marek Gałecki	5–37,76
Zbigniew Skalik	2–37,76
Jędrzej Garnek	2–37,64
Roksana Słowik	1–36,41
Krzysztof Maziarz	35,37
Adam Dzedzej	2–31,82
Marcin Małogrosz	1–30,28
Michał Koźlik	29,50
Michał Miodek	2–26,32
Patryk Jaśniewski	25,35
Paweł Duch	1–24,10
Krzysztof Kamiński	2–22,58
Jerzy Cisło	12–21,04
Marcin Kasperski	3–20,98
Bartłomiej Pawlik	19,71
Piotr Lipiński	1–18,80
Janusz Wojtal	18,58
Jędrzej Biedrzycki	17,62

Legenda (przykładowo): stan konta 6–38,72 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 38,72 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 16 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2014, 2015 lub 2016.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (13), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (17), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (10), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (6), J. Cisło (12), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedzej, J. Fiett, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Teraz, jak co roku, wybrane zadania w skrótowym omówieniu. Więc głównie te, gdzie współczynnik trudności (WT) jest wysoki, a liczba poprawnych rozwiązań (LPR) niewielka. Ten ostatni skrót jest nieco mylący – chodzi raczej o liczbę uczestników, którzy poprawnie rozwiązali zadanie; gdy ktoś przysłał dwa dobre rozwiązania, wówczas „liczba rozwiązań”, rozumiana dosłownie, jest większa od przyjętej wartości LPR, zliczającej autorów dobrych prac. Z taką właśnie sytuacją mamy do czynienia w zadaniu, od którego rozpoczynamy omówienie.

* * *

Zadanie **710.** [$a_0 > 1$, $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$; $b_n = n\ln n \;\Rightarrow\; a_n \sim b_n$ (tj. $a_n/b_n \to 1$)] (WT=3,44; LPR=3). Zadanie zaproponował pan **Tomasz Ordowski**, z heurystycznym argumentem na poparcie tezy. Obecnie mamy pięć rozwiązań (dwa od jednego autora). Firmowe (redaktora ligi) przebija zawiłością wszystkie pozostałe. Zgrabniejsze są trzy dowody z dwustronnym szacowaniem ciągu (a_n). Ukażemy je w skrócie; uzasadnienia nierówności (2), (3), (6), (7) nie są natychmiastowe, ale i niezbyt trudne – to rutynowe ćwiczenia na pierwszym roku studiów.

Jerzy Cisło: $a_n = a_0 + (\ln a_0 + \ldots + \ln a_{n-1})$, skąd

$$n\ln a_0 < a_n < a_0 + n\ln a_n, \tag{1}$$

$$a_n > \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k\ln a_0) = \ln\big((n-1)!\big) + (n-1)\ln\ln a_0 > (n-1)\big(\ln(n-1) - A\big) \tag{2}$$

dla pewnej stałej $A > 0$. Skoro zaś $a_n < 2a_{n-1}$, zatem $a_n < 2^n a_0$, i wobec (1): $a_n < Bn^2$ dla pewnej stałej $B > 0$. Stosując jeszcze dwa razy prawą nierówność (1), znajdujemy stałą $C > 0$, dla której, kolejno,

$$a_n < a_0 + \ln(Bn^2) < Cn\ln n, \tag{3}$$

$$a_n < a_0 + n\ln(Cn\ln n) = a_0 + n(\ln C + \ln n + \ln\ln n). \tag{4}$$

Ciągi uzyskane po prawych stronach (2) i (4) są $\sim b_n$; teza.

Marcin Małogrosz: Ustalmy liczby dodatnie α, β, spełniające warunki: $3\alpha \leqslant a_3$, $\alpha \leqslant \ln a_3$, $\beta \geqslant 2$, $\beta \geqslant a_3/b_3$; indukcyjnie dowodzimy, że

$$\alpha\cdot n \leqslant a_n \leqslant \beta\cdot b_n \quad \text{dla } n \geqslant 3. \tag{5}$$

Krok indukcyjny dla lewej nierówności jest bardzo łatwy; dla prawej – wymaga paru przekształceń, z których wynotujemy kluczowe kroki:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \beta\cdot b_{n+1} &\leqslant \beta\cdot(b_n - b_{n+1}) + \ln(\beta\cdot b_n) = \\ &= \beta\cdot n\big(\ln n - \ln(n+1)\big) + \ln\beta + \\ &\quad + \ln n + \ln\ln n - \beta\ln(n+1) < \\ &< (1-\beta)\ln n + \ln\beta + \ln\ln n \leqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dokończenie rozumowania ze wzoru Stolza (z wykorzystaniem asymptotyki $b_{n+1} - b_n \sim \ln n$):

$$\lim\frac{a_n}{b_n} = \lim\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim\frac{\ln a_n}{\ln n} = 1;$$

ostatnia równość wynika wprost z (5).

Janusz Olszewski: $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, gdzie $\varphi(x) = x + \ln x$; niech $c_n = n\ln b_n$; wówczas

$$b_{n+1} < \varphi(b_n) \quad \text{dla } n \geqslant 17; \qquad c_{n+1} > \varphi(c_n) \quad \text{dla } n \geqslant 1; \tag{7}$$

pierwsza z tych nierówności sprowadza się do $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leqslant \ln n$ (prawda dla $n \geqslant 17$); druga – po wprowadzeniu wyrażeń definiujących c_n i b_n, obłożeniu obu stron funkcją exp i po nietrudnych przekształceniach przybiera postać

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}\Big(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\Big)^{n+1} > \frac{\ln n + \ln\ln n}{\ln n}$$

– prawda, bo lewa strona jest większa od e, a prawa mniejsza od 2. Teraz znajdujemy takie liczby naturalne p, q, by $a_{p+17} > b_{17}$, $c_q > a_0$, i przez indukcję dostajemy z zależności (7) oszacowania $a_n > b_{n-p}$ dla $n \geqslant p + 17$ oraz $a_n < c_{n+q}$ dla $n \geqslant 0$. To już teza, bo $c_n \sim b_n$.

Te trzy rozwiązania mają wiele wspólnych elementów. Czwarte jest odmienne, i też efektowne:

Janusz Olszewski: Funkcja $f(x) = x/\ln x$ jest wklęsła w przedziale (e^2, ∞), toteż

$$f'(a_{n+1}) < \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} < f'(a_n) \quad \text{gdy } a_n > \mathrm{e}^2.$$

Oznaczając $g(x) = f'(x)\ln x$, $r_n = f(a_{n+1}) - f(a_n)$, $\delta_n = (\ln a_n)/(\ln a_{n+1})$, przepisujemy to oszacowanie jako $\delta_n g(a_{n+1}) < r_n < g(a_n)$; zatem $r_n \to 1$ (bo $\delta_n \to 1$, $g(x) \to 1$ przy $x \to \infty$). Stąd

$$\frac{f(a_n) - f(a_0)}{n} = \frac{r_0 + \ldots + r_{n-1}}{n} \to 1.$$

Tak więc $\lambda_n := \frac{f(a_n)}{n} \to 1$, $\mu_n := \frac{\ln f(a_n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\lambda_n}{\ln n} \to 1$, wobec czego $\lambda_n\mu_n \to 1$. Koniec, bo $\lambda_n\mu_n = \frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{\ln a_n - \ln\ln a_n}{\ln a_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$.

Zadanie **711.** [Czy istnieje permutacja $x_1, x_2, \ldots$ zbioru $\mathbb{N}$ o własności: $n | x_1 + \ldots + x_n$?] (WT=2,07; LPR=14). Zasadniczo dwie metody, obie licznie reprezentowane. Albo, jak w firmowym, dołączanie po dwa wyrazy, albo dołączanie jednego wyrazu – najmniejszej liczby jeszcze nie wykorzystanej, a spełniającej wymagany warunek; jest to albo średnia arytmetyczna wcześniejszych wyrazów, albo następna dobra liczba. Ciąg jest obecny w OEIS (A019444), konstrukcja tą drugą metodą (algorytm „zachłanny”), wszelako bez dokładnych uzasadnień; przy odwołaniu do OEIS, uzupełnienie uzasadnień było niezbędne dla oceny maksymalnej.

Zadanie **713.** [Czworokąt $ABCD$; okręgi (ABP), (CDQ) styczne do CD i do AB w punktach P i Q; ich wspólna cięciwa połowi $PQ \;\Rightarrow\; AD\|BC$] ($WT$=3,51; LPR=3). Dobre rozwiąznia: **J. Olszewski**, **J. Węgrecki** (identyczne z firmowym) oraz (dość podobnie) **T. Wietecha**; było jeszcze jedno rozumowanie, rozpoczęte obiecująco, ale bez kluczowego uzasadnienia.

Zadanie **715.** [Dane $A, B \in \mathbb{N}$, $A \neq B \Rightarrow$ zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$ jest sumą rozłącznych przesunięć zbiorów $\{-A, 0, B\}$, $\{-B, 0, A\}$] (WT=2,20; LPR=7). **J. Cisło**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**, **R. Słowik** podali ten sam algorytm, co i rozwiązanie firmowe; **M. Małogrosz** – algorytm nieco bardziej skomplikowany (w każdym kroku modyfikacja wstecz), ale też bezbłędny. Dwaj uczestnicy zwrócili uwagę, że zagadnienie jest znane: **A. Dzedzej** wskazał jego obecność nawet w książce popularnej: R. Honsberger, *Mathematical Gems II* (MAA 1976) oraz zacytował pracę: A. D. Meyerowitz, *Tilings in* $\mathbb{Z}$ *with triples* (J. Combin. Th. A 48 (1988), 229–235) (`www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316588900088`); zaś **P. Kumor** – tę samą pracę, a ponadto pracę: B. Gordon, *Tilings of lattice points in Euclidean* n*-space* (Discrete Math. 29 (1980), 169–174) (`www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X80900047`). Można się z nich dowiedzieć, że kratę $\mathbb{Z}^n$ (i pewne jej podzbiory) da się pokryć rozłącznymi przystającymi kopiami *dowolnego* zbioru trójelementowego; a dla $n = 1$ zapoznać się z zagadnieniem, jak krótki blok kolejnych liczb całkowitych daje się pokryć zbiorami z zadania (dalsze odsyłacze bibliograficzne w cytowanych pracach).

Zadanie **716.** [a, b, c – boki trójkąta $\Rightarrow$ $\sum_{\text{cykl}}(a^2b + ab^2 - abc)^{1/2} > \frac{1}{2}(a + b + c)^{3/2}$; stała $\frac{1}{2}$ optymalna] (WT=1,85; LPR=10). Sporo dobrych rozwiązań, w większości opartych na rozważaniach geometrycznych. Idąc tą ścieżką, **Piotr Kumor** uzyskał wzmocnienie tezy: różnica między lewą a prawą stroną nierówności jest $\geqslant Cr^{3/2}$, gdzie r to promień okręgu wpisanego, zaś C jest stałą, dającą równość w przypadku trójkąta równobocznego; zauważył też, że analogiczna nierówność zachodzi dla dowolnych n-kątów ($n \geqslant 3$), mających okrąg wpisany.

Zadanie **717.** [$\triangle ABC$: $|\sphericalangle C| = 2 \cdot |\sphericalangle A|$; CD – dwusieczna ($\sphericalangle C$); S – środek okręgu stycznego (zewn.) do okręgów (ACD), (BCD) i do półprostej $CA^{\rightarrow}$ $\Rightarrow$ $AB \perp CS$] (WT=3,70; LPR=1). Tylko jedno rozwiązanie: **Janusz Olszewski**; przy tym zupełnie odmienne od firmowego:

Jak w firmówce, oznaczmy przez k_1 okrąg o środku S, określony w zadaniu, a przez k_2, k_3 – okręgi (ACD), (BCD); punkty styczności E, F, G – jak na rysunku. Z założenia $|\sphericalangle C| = 2 \cdot |\sphericalangle A|$ wynika, że prosta BC jest styczna do k_2 oraz że proste styczne do k_2, k_3 w punktach D i B są $\|AC$. Zatem jednokładność φ o środku E, która przekształca okrąg k_2 na k_1, przeprowadza pierwszą z tych stycznych na prostą AC; zaś jednokładność o środku G, która przekształca okrąg k_3 na k_1, przeprowadza drugą z tych stycznych na AC; tak więc $E \in FD$, $G \in FB$.

Z zależności kątowych łatwo teraz zobaczyć, że $\triangle FBA \sim \triangle DBG$, skąd $|BF| \cdot |BG| = |BA| \cdot |BD|$, czyli B leży na osi potęgowej okręgów k_1 i k_2; prosta BE jest ich wspólną styczną. Zatem prosta CE jest biegunową punktu B względem k_2. W odwzorowaniu φ nie zmienia ona położenia – jest więc także biegunową punktu $B' = \varphi(B)$ względem k_1. Z dualności biegunowych wynika teraz, że B' leży na biegunowej punktu C względem k_1. Punkt F również na niej leży. Wobec tego $B'F \perp CS$. Pozostaje zauważyć, że $B'F\|BD$ (bo $F = \varphi(D)$). Pięknie!

Zadanie **721.** [$\triangle ABC$; D, E, F – punkty styczności boków z okręgami dopisanymi $\Rightarrow [DEF] : [ABC] = r : 2R$] ($WT$=2,44; LPR=10). Również i to zadanie okazało się znane lepiej, niż moglibyśmy sobie życzyć. Rozwiązanie firmowe polegało na wyprowadzeniu wzoru $(*)$: $[DEF] : [ABC] = 2uvw : abc$ (gdzie $a = |BC|$, $u = |BD|$; $D \in BC$ (& cykl)); prace wszystkich uczestników też – mniej lub bardziej wyraźnie – do tej równości się sprowadzają.

W XXXVII O.M. wzór $(*)$ pojawia się w rozwiązaniu firmowym zadania II-6, i to przy (słabszym) założeniu, że odcinki AD, BE, CF jedynie mają punkt wspólny (D, E, F to niekoniecznie punkty z naszego zadania). Ale – jak zauważył **Tomasz Wietecha** – już w XVI O.M. zadanie III-5 miało tezę jeszcze ogólniejszą: gdy D, E, F to *dowolne* punkty na odpowiednich bokach, wówczas $[DEF] : [ABC] = \big(uvw + (a-u)(b-v)(c-w)\big) : (abc)$; gdy działa twierdzenie Cevy, daje to wzór $(*)$. **Paweł Kubit**, dla odmiany, odesłał do książki: S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*, gdzie (w rozważaniach ilustrujących twierdzenie Van Aubela) także można znaleźć równoważną postać wzoru $(*)$ dla przypadku objętego twierdzeniem Cevy.

Nie pierwszy to raz, i z pewnością nie ostatni, gdy zadanie ligowe dla wyjadaczy okazuje się folklorem. Na przykład:

Zadanie **723.** [(F_n) – ciąg Fibonacciego; czy $\forall\, a, r\, \exists\, n:\ F_n \equiv a \pmod r$?] (WT=1,33; LPR=16). Banalne kontrprzykłady: $r = 8, 11, 12, 13, 16$ i wiele innych. **P. Kumor** – interesujący odsyłacz: S. A. Burr, *On moduli for which the Fibonacci sequence contains a complete system of residues*, Fibonacci Q-ly 9 (1971), 497–504 (`www.mathstat.dal.ca/FQ/Scanned/9-5/burr.pdf`).