Zadania z matematyki nr 733, 734

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2017

733. Wierzchołek czworościanu nazwijmy *ciekawym*, jeśli z trzech wychodzących zeń krawędzi nie da się zbudować trójkąta.

(a) Czy istnieje czworościan, którego wszystkie wierzchołki są ciekawe?

(b) Czy istnieje czworościan, mający dokładnie jeden ciekawy wierzchołek?

734. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $p, q, a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} a_{k+1}^{-q} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{p} \qquad (\text{przyjmujemy } a_{n+1} = a_1).$$

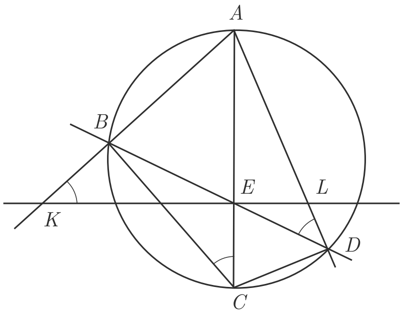
Zadanie 734 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2016

Przypominamy treść zadań:

725. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E. Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt E, przecina proste AB i AD w punktach K i L. Wykazać, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

726. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że istnieje nieujemna liczba całkowita m taka, że $2m \leqslant n$ oraz różnica $2^n - 2^m$ dzieli się przez n.



725. Gdy przekątne są prostopadłe, punkty K i L pokrywają się z B i D, i nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy dalej, nie tracąc ogólności, że kąt AEB jest ostry (wtedy punkt B leży między A i K, zaś L leży między A i D). Czworokąt $ABCD$ ma okrąg opisany (o średnicy AC). Stąd oraz z zależności w trójkątach prostokątnych ABC i AEK dostajemy ciąg równości

$$|\sphericalangle LDE| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BKE|.$$

Z ostatniej równości wynika położenie punktów B, D, K, L na wspólnym okręgu.

726. Zapiszmy liczbę n w postaci $n = 2^k q$ ($k \geqslant 0$, $q \geqslant 1$ całkowite, q nieparzyste). Znajdujemy wykładnik δ, dla którego

$$2^\delta \equiv 1 \pmod{q}. \tag{1}$$

Jeśli pewien wykładnik spełnia ten warunek, to jego dwukrotność też. Można więc wybrać δ tak, by

$$\frac{q}{2} < \delta \leqslant q - 1. \tag{2}$$

Liczbę m, o jaką pyta zadanie, spróbujemy znaleźć wśród liczb postaci $n - j\delta$ ($j \geqslant 0$ całkowite). Dla $m = n - j\delta$ różnica

$$2^n - 2^m = 2^{n-j\delta}(2^{j\delta} - 1)$$

będzie podzielna przez $n = 2^k q$, jeśli tylko $k \leqslant n - j\delta$, bowiem czynnik w nawiasie dzieli się przez q (por. (1)). Biorąc jeszcze pod uwagę wymaganie, by $m \leqslant n/2$, widzimy, że wystarczy znaleźć liczbę j spełniającą nierówność

$$\frac{n}{2} \leqslant j\delta \leqslant n - k; \tag{3}$$

wówczas liczba $m = n - j\delta$ spełni wszystkie żądane warunki.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, czyli gdy $k = 0$, $q = n$, można wziąć $j = 1$ (por. (2)).

Gdy n jest liczbą parzystą (więc $k \geqslant 1$), warunki (3) postulują istnienie wielokrotności liczby δ w przedziale $[n/2, n-k]$. Do tego wystarcza, by δ nie przekraczała wartości $n/2 - k + 1$ (bo tyle jest liczb całkowitych w tym przedziale); a dzięki oszacowaniu (2) wystarczy, by zachodziła nierówność

$$q - 1 \leqslant \frac{n}{2} - k + 1,$$

czyli (równoważnie)

$$(2^{k-1} - 1)q \geqslant k - 2.$$

To kończy rozwiązanie, bowiem ostatnia nierówność jest słuszna dla każdej pary liczb całkowitych $k, q \geqslant 1$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 723 ($WT = 1{,}33$) i 724 ($WT = 2{,}12$) z numeru 6/2016

Piotr Kumor	Olsztyn	45,36
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,11
Witold Bednarek	Łódź	38,72
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,76
Marek Gałecki	USA	37,76
Roksana Słowik	Knurów	36,41

Uczestnicy ligi, przekraczający barierę *44 p.* prawie równocześnie – tak się ciekawie złożyło – toż to sama elita Klubu 44M! Przypomnijmy sobie nazwiska z poprzednich dwóch miesięcy i popatrzmy na bieżącą tabelę: Piotr Kumor po raz trzynasty (!); a tuż za nim ligowcy, którzy też (jak widać) miną linię mety lada chwila, po raz któryś-tam z rzędu…