Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
717 ($WT = 3{,}70$) i 718 ($WT = 1{,}03$)
z numeru 3/2016

Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Janusz Olszewski	Warszawa	42,14
Paweł Kubit	Kraków	41,52
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Piotr Kumor	Olsztyn	34,15
Witold Bednarek	Łódź	33,95

Zadania z matematyki nr 727, 728

Redaguje Marcin E. KUCZMA

727. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkącików o boku 1. Każdy wierzchołek powstałej siatki (tj. wierzchołek któregoś trójkącika) jest pomalowany na biało lub czarno. Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu zmieniamy kolor wszystkich wierzchołków, leżących na jednej linii prostej, zawierającej bok któregoś trójkącika.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których – wychodząc od stanu: wszystkie wierzchołki białe – można dojść do stanu: dokładnie jeden wierzchołek czarny.

728. Czy istnieje funkcja różniczkowalna f, będąca różnowartościowym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb dodatnich na ten sam zbiór, i taka, że jej pochodna jest funkcją odwrotną do f?

Zadanie 728 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

Rozwiązania zadań z numeru 6/2016

Przypominamy treść zadań:

723. Czy każdy ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych ma wyraz, będący jednocześnie pewnym wyrazem ciągu Fibonacciego (F_n)? ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

724. Dowieść, że liczby zespolone a, b, c spełniają równanie
$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a| + |b| + |c|$$
wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie
$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a+b+c|.$$

723. Odpowiedź: nie. Banalny kontrprzykład (jeden z wielu): ciąg $(11n+4;\ \ n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ciąg Fibonacciego – a raczej jego początkowy odcinek – zapisany modulo 11, przedstawia się tak: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, \ldots$. Dalej reszty (mod 11) powtarzają się cyklicznie, z okresem 10; reszta 4 jest w tym ciągu nieobecna.

724. Podstawienie $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ przeprowadza dane dwa równania do postaci
$$|x| + |y| + |z| = \frac{1}{2}\big(|y+z| + |z+x| + |x+y|\big) \tag{1}$$
oraz
$$|x| + |y| + |z| = |x+y+z|. \tag{2}$$
Oczywiste są nierówności
$$|x| + |y| + |z| \geqslant \frac{1}{2}\big(|y+z| + |z+x| + |x+y|\big) \geqslant |x+y+z|.$$
Jeśli więc liczby x, y, z spełniają równanie (2), to spełniają też i równanie (1). Pozostaje do wykazania implikacja przeciwna.

Załóżmy więc, że spełnione jest równanie (1), czyli że zachodzi równość w pierwszej z napisanych nierówności. To wymusza jednoczesne zachodzenie trzech równości:
$$|y+z| = |y| + |z|, \qquad |z+x| = |z| + |x|, \qquad |x+y| = |x| + |y|.$$
Liczby $|x+y|$, $|x|$, $|y|$ są długościami boków trójkąta (na płaszczyźnie zespolonej) o wierzchołkach 0, y, $-x$. Równość $|x+y| = |x| + |y|$ oznacza, że jest on zdegenerowany do odcinka o końcach $y, -x$, czyli że punkty x, y leżą na jednej półprostej, wychodzącej z punktu 0. Ta sama konkluzja dla par y, z oraz z, x pokazuje, że wszystkie trzy punkty x, y, z leżą na jednej takiej półprostej. A wówczas zachodzi równość (2). To kończy rozwiązanie zadania.
Uwaga. Warto może zauważyć, że dwa podane (równoważne) równania *nie są* równoważne trzeciemu równaniu:
$$|a+b+c| = |a| + |b| + |c|,$$
czyli (w terminach zmiennych x, y, z) równaniu, łączącemu prawe strony (1) i (2). Prosty przykład: $x = y = 1$, $z = -1$. Równania (1) i (2) nie są spełnione, ale ich prawe strony mają jednakową wartość.