Zadania z matematyki nr 725, 726

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2016

725. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E. Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt E, przecina proste AB i AD w punktach K i L. Wykazać, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

726. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że istnieje nieujemna liczba całkowita m taka, że $2m \leqslant n$ oraz różnica $2^n - 2^m$ dzieli się przez n.

Zadanie 726 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 715 ($WT = 2{,}20$) i 716 ($WT = 1{,}85$) z numeru 2/2016

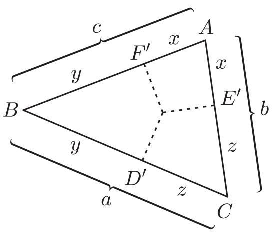
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Paweł Kubit	Kraków	40,59
Marek Gałecki	USA	37,76
Janusz Olszewski	Warszawa	37,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Witold Bednarek	Łódź	33,95
Piotr Kumor	Olsztyn	33,12

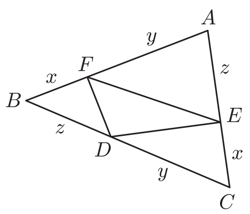
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2016

Przypominamy treść zadań:

721. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty D, E, F, w których okręgi dopisane do trójkąta są styczne do tych boków. Niech R i r będą promieniami okręgów opisanego i wpisanego. Dowieść, że stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi $2R/r$.

722. Rozwiązać równanie $2^x + 2^y = 6^z$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.





721. Punkty D, E, F są położone na bokach BC, CA, AB symetrycznie (względem środków owych boków) do punktów D', E', F', w których okrąg wpisany jest do boków styczny. Przyjmijmy oznaczenia:

$$x = |AE'| = |AF'| = |BF| = |CE|,$$
$$y = |BF'| = |BD'| = |CD| = |AF|,$$
$$z = |CD'| = |CE'| = |AE| = |BD|, \qquad s = x + y + z,$$
$$a = |BC| = s - x, \quad b = |CA| = s - y, \quad c = |AB| = s - z.$$

Oznaczając pole trójkąta nawiasem kwadratowym, uzyskujemy ciąg równości

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = 1 - \frac{[AEF]}{[ABC]} - \frac{[BFD]}{[ABC]} - \frac{[CDE]}{[ABC]} =$$
$$= 1 - \frac{yz}{bc} - \frac{zx}{ca} - \frac{xy}{ab} = \frac{abc - ayz - bzx - cxy}{abc}.$$

Zastępując w liczniku a, b, c przez $s-x$, $s-y$, $s-z$, otrzymujemy po krótkim rachunku wzór

$$(*) \qquad \frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2xyz}{abc}.$$

Pozostaje teraz skorzystać ze znanych wzorów, wyrażających pole trójkąta (jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego):

$$[ABC] = rs = \frac{abc}{4R} = \sqrt{sxyz} \qquad \text{(ostatni – to wzór Herona).}$$

Dostajemy związki $abc = 4Rrs$ oraz $xyz = r^2 s$, które po wprowadzeniu do równości $(*)$ dają tezę zadania.

722. Wykładniki x, y nie mogą być równe, gdyż wówczas lewa strona równania byłaby potęgą dwójki. Przyjmijmy więc, że $x < y$, i zapiszmy $y = x + t$, gdzie $t \geqslant 1$. Równanie przybiera postać $2^x(2^t + 1) = 2^z 3^z$, z której wynika, że $x = z$, $2^t + 1 = 3^z$.

Jeśli $t = 1$, to $z = 1$; dostajemy rozwiązanie $x = 1$, $y = 2$.

Jeśli $t \geqslant 2$, to $3^z = 2^t + 1 \equiv 1 \pmod 4$, skąd wniosek, że z jest liczbą parzystą: $z = 2w$. Dostajemy równanie

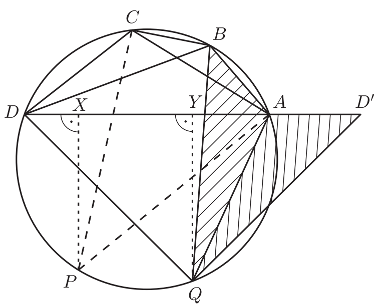
$$2^t = 3^{2w} - 1 = (3^w - 1)(3^w + 1).$$

Czynniki prawej strony muszą być potęgami dwójki; a skoro różnią się o 2, są to liczby 2 i 4. To znaczy, że $w = 1$, czyli $z = 2$, $t = 3$, co daje rozwiązanie $x = 2$, $y = 5$.

Uwzględniając możliwą zamianę ról x i y, widzimy, że równanie ma cztery rozwiązania (x, y, z) w liczbach całkowitych dodatnich: $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(2, 5, 2)$, $(5, 2, 2)$.

Rozwiązanie zadania M 1505.
Niech D' będzie takim punktem na prostej AD, na zewnątrz okręgu ω, że $AD' = AB$. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QAD' = 180^\circ - \sphericalangle QAD = 180^\circ - \sphericalangle QBD = 180^\circ - \sphericalangle QDB = \sphericalangle QAB$. Stąd trójkąty QAD' i QAB są przystające, w szczególności $QD' = QD$. W takim razie trójkąt $QD'D$ jest równoramienny i

$$DY = YD' = YA + YD' = YA + AB.$$



Analogicznie otrzymujemy równość $AX = XD + DC$. W takim razie mamy $2 \cdot XY = (AX - YA) + (DY - XD) = (AX - XD) + (DY - YA) = DC + AB$, a stąd $XY = \dfrac{DC + AB}{2} = 5$.