Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2016

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

719. Czternaścioro ludzi prezentowało swoje umiejętności w serii występów (TV-show?); w pojedynczym występie mogła uczestniczyć dowolna liczba osób. Było to siedem par małżeńskich – ale małżonkowie nigdy nie wystąpili razem. Za to każda inna para osób (dowolnej płci) uczestniczyła jednocześnie w dokładnie jednym występie. Wiadomo ponadto, że pewna osoba uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Jaka jest minimalna liczba występów, przy której te warunki mogły być spełnione?

720. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą s taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n} \leqslant 2(x^2+s)^n.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 713 ($WT = 3{,}51$) i 714 ($WT = 1{,}20$) z numeru 1/2016

Stanisław Bednarek	Łódź	44,55
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Paweł Kubit	Kraków	38,74
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Witold Bednarek	Łódź	33,95
Janusz Olszewski	Warszawa	33,36

Stanisław Bednarek – to już *44* po raz drugi.

719. Niech A_0 będzie tą osobą, która uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Przyjmijmy, że to pani; jej mąż otrzymuje oznaczenie B_0. Pozostałe pary małżonków: (A_i, B_i); $i = 1, \ldots, 6$. W jednym swoim występie pani A_0 musiała się pokazać w towarzystwie połowy tych ludzi; w drugim – z pozostałą połową. Ustalmy oznaczenia tak, że w jednym z tych występów uczestniczyły osoby $A_0, A_1, \ldots, A_6$, a w drugim $A_0, B_1, \ldots, B_6$. I znów, bez straty ogólności, możemy przyjąć (dla wygody języka), że osoby A_i to panie, a B_i panowie (w kontekście tego zadania szybka zmiana płci to nie problem).

W każdym z pozostałych występów mogły uczestniczyć, oprócz pana B_0, co najwyżej dwie osoby – bo gdyby więcej, to byłyby/byliby wśród nich dwie panie lub dwaj panowie; a przecież one/oni już się pokazali wspólnie, wraz z panią A_0.

Każda para (A_i, B_j), gdzie $i, j \geqslant 1$, $i \neq j$, musiała raz wspólnie wystąpić; i były to różne występy. Jest 30 takich par. Uwzględniając dwa występy z udziałem pani A_0, widzimy, że liczba występów musiała wynieść co najmniej 32.

Czy realizacja tej wartości jest wykonalna? Trzeba zapewnić panu B_0 wspólne uczestnictwo z każdą osobą poza panią A_0. Uzyskamy to, dołączając go (na przykład) do par (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_3, B_4), (A_4, B_3), (A_5, B_6), (A_6, B_5). Zostaną przez to spełnione wszystkie wymagane warunki. Tak więc szukane minimum wynosi 32.

720. Oznaczmy przez $L_s(x)$ oraz $P_s(x)$ lewą oraz prawą stronę napisanej nierówności. Ponieważ

$$L_s(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2n-2k},$$

$$P_s(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2n-2k} s^k,$$

zatem połowa ich różnicy to wielomian parzysty zmiennej x (z parametrem s)

$$\frac{P_s(x) - L_s(x)}{2} = c_1 x^{2n-2} + c_2 x^{2n-4} + \ldots + c_{n-1}x^2 + c_n$$

o współczynnikach

$$c_k = \binom{n}{k} s^k - \binom{2n}{2k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Aby ten wielomian przyjmował wyłącznie wartości nieujemne, musi być spełniony warunek $c_1 \geqslant 0$, czyli $ns - n(2n-1) \geqslant 0$, czyli $s \geqslant 2n-1$.

Pokażemy, że jest to jednocześnie warunek dostateczny. Wystarczy wykazać, że jeśli $s \geqslant 2n-1$, to wszystkie współczynniki c_k są nieujemne. Indukcja: baza ($c_1 \geqslant 0$) już gotowa. Ustalmy $k \geqslant 1$ i przyjmijmy założenie indukcyjne $c_k \geqslant 0$, czyli

$$\binom{n}{k}\binom{2n}{2k}^{-1} s^k \geqslant 1.$$

Teza indukcyjna ($c_{k+1} \geqslant 0$) ma analogiczną postać, z k zastąpionym przez $k+1$. Piszemy więc to wyrażenie i zaczynamy je przekształcać:

$$\binom{n}{k+1}\binom{2n}{2k+2}^{-1} s^{k+1} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{2n}{2k}^{-1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2n-2k)(2n-2k-1)} \cdot s^{k+1} =$$

$$= \binom{n}{k}\binom{2n}{2k}^{-1} s^k \cdot \frac{2k+1}{2n-2k-1} \cdot s;$$

stąd i z założenia indukcyjnego,

$$\binom{n}{k+1}\binom{2n}{2k+2}^{-1} s^{k+1} \geqslant \frac{2k+1}{2n-2k-1} \cdot s \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(2k+1)(2n-1)}{2n-2k-1} > 1,$$

i mamy tezę indukcyjną. Tak więc $c_k \geqslant 0$ dla $k = 1, \ldots, n$, wobec czego $P_s(x) - L_s(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Otrzymaliśmy odpowiedź: najmniejsza wartość parametru s, dla której $P_s(x) \geqslant L_s(x)$ (dla $x \in \mathbb{R}$), wynosi $s = 2n-1$.