Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 711 ($WT = 2{,}07$) i 712 ($WT = 1{,}37$) z numeru 12/2015

Stanisław Bednarek	Łódź	43,35
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	41,04
Marek Gałecki	USA	37,76
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	37,54
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	36,09

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2016

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

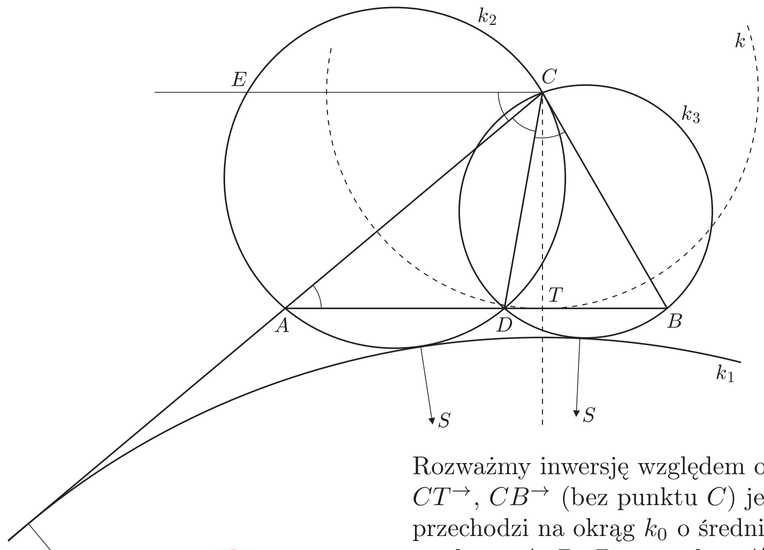
717. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle BCA| = 2\cdot|\sphericalangle CAB|$. Odcinek CD (o końcu $D\in AB$) jest dwusieczną kąta BCA. Punkt S jest środkiem okręgu, stycznego zewnętrznie do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD oraz stycznego do półprostej $CA^{\rightarrow}$. Udowodnić, że proste AB i CS są prostopadłe.

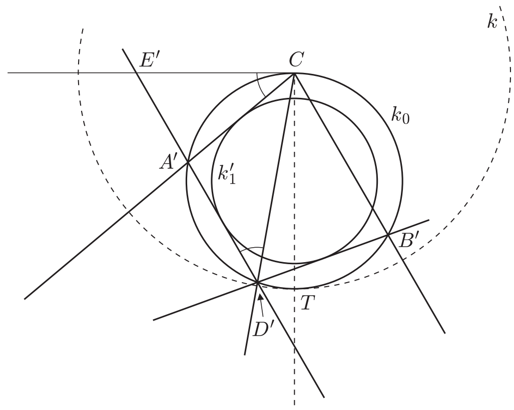
718. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d zachodzi równość

$$[a,b,c,d] = \frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{(a,b,c,d)}\cdot\frac{(a,b,c)\cdot(a,b,d)\cdot(a,c,d)\cdot(b,c,d)}{(a,b)\cdot(a,c)\cdot(a,d)\cdot(b,c)\cdot(b,d)\cdot(c,d)}.$$

Nawias kwadratowy oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, zaś nawias okrągły – największy wspólny dzielnik liczb ujętych w ów nawias.

717. Niech $\alpha = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$. Duży okrąg o środku S, którego dotyczy zadanie, oznaczmy symbolem k_1. Okręgi opisane na trójkątach ACD i BCD oznaczmy przez k_2 i k_3. Niech CE będzie cięciwą okręgu k_2, równoległą do DA (zatem $|\sphericalangle ACE| = \alpha$), i niech k będzie okręgiem o środku C, stycznym do prostej AB w punkcie T. Skoro $CT\perp AB$, teza zadania sprowadza się do wykazania, że punkt S leży na prostej CT.





Rozważmy inwersję względem okręgu k. Każda z półprostych $CE^{\rightarrow}$, $CA^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $CT^{\rightarrow}$, $CB^{\rightarrow}$ (bez punktu C) jest odwzorowywana na samą siebie. Prosta AB przechodzi na okrąg k_0 o średnicy CT (punkt T nie zmienia położenia). Obrazami punktów A, D, B są punkty A', D', B', w których półproste $CA^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $CB^{\rightarrow}$ przecinają okrąg k_0. Okręgi k_2 i k_3 (bez punktu C, który jest środkiem inwersji) zostają przekształcone na proste $A'D'$ oraz $D'B'$. Obrazem okręgu k_1 jest okrąg k_1', styczny do prostych CA', $A'D'$ i $D'B'$.

Prosta CE' jest styczna do okręgu k_0, więc $|\sphericalangle A'D'C| = |\sphericalangle A'CE'| = |\sphericalangle ACE| = \alpha$. Także $|\sphericalangle A'CD'| = |\sphericalangle ACD| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle D'CB'| = |\sphericalangle DCB| = \alpha$. Zatem cięciwy CA', $A'D'$, $D'B'$ okręgu k_0 są jednakowej długości. Okrąg k_1', styczny do tych trzech cięciw, jest wobec tego współśrodkowy z okręgiem k_0. Prosta CT jest więc osią symetrii okręgu k_1'.

Stąd wynika, że ta sama prosta CT jest też osią symetrii okręgu k_1 – przechodzi zatem przez jego środek, czyli punkt S – a to właśnie mieliśmy wykazać.

718. Prawa strona podanej równości ma postać ilorazu K/M (licznik K to iloczyn ośmiu czynników, mianownik M to iloczyn siedmiu czynników). Lewa strona to $L = [a, b, c, d]$. Wystarczy pokazać, że dowolna liczba pierwsza wchodzi do rozkładów liczb K oraz LM w jednakowej potędze (być może zerowej).

Ustalmy więc liczbę pierwszą p i przyjmijmy, że liczby a, b, c, d, K, L, M są podzielne odpowiednio przez p^α, p^β, p^γ, p^δ, p^κ, p^λ, p^μ, ale nie przez $p^{\alpha+1}$, $p^{\beta+1}$, $p^{\gamma+1}$, $p^{\delta+1}$, $p^{\kappa+1}$, $p^{\lambda+1}$, $p^{\mu+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\kappa &= \alpha+\beta+\gamma+\delta+\\ &\quad+\min\{\alpha,\beta,\gamma\}+\min\{\alpha,\beta,\delta\}+\min\{\alpha,\gamma,\delta\}+\min\{\beta,\gamma,\delta\},\\ \mu &= \min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}+\\ &\quad+\min\{\alpha,\beta\}+\min\{\alpha,\gamma\}+\min\{\alpha,\delta\}+\min\{\beta,\gamma\}+\min\{\beta,\delta\}+\min\{\gamma,\delta\},\\ \lambda &= \max\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}.\end{aligned}$$

Należy wykazać, że $\kappa = \lambda + \mu$.

Wobec symetrii rozważanych wyrażeń (względem permutacji a, b, c, d) nie tracimy ogólności zakładając, że $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta$. Napisane równości uzyskują postać

$$\begin{aligned}\kappa &= \alpha+\beta+\gamma+\delta+\gamma+\delta+\delta+\delta,\\ \mu &= \delta+\beta+\gamma+\delta+\gamma+\delta+\delta,\\ \lambda &= \alpha;\end{aligned}$$

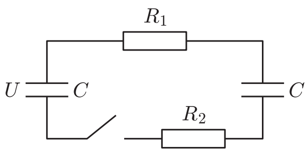
teza $(\kappa = \lambda + \mu)$ gotowa.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

614. Znaleźć ilość ciepła, jaka wydzieli się na każdym z oporników po zamknięciu klucza. Jeden z kondensatorów naładowany był początkowo do napięcia U, drugi nie był naładowany. Pojemności kondensatorów są jednakowe i równe c, wartości oporów wynoszą R_1i R_2.



615. Stosunek liczby zwojów w uzwojeniu wtórnym transformatora do liczby zwojów w uzwojeniu pierwotnym wynosi $n = 2$. Gdy do uzwojenia pierwotnego przyłożono napięcie przemienne o amplitudzie $U_1 = 100V$, amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym wynosiła $U_2 = 197V$. Jaka będzie amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym, gdy rdzeń transformatora zastąpimy rdzeniem o tych samych wymiarach, ale wykonanym z materiału o przenikalności magnetycznej $k = 10$razy mniejszej niż w pierwszym przypadku? Rozpraszanie strumienia magnetycznego oraz straty w rdzeniu możemy zaniedbać.

614. Przed zamknięciem klucza energia naładowanego kondensatora wynosi $W_1 = cU^2/2$, a jego ładunek jest równy $q = cU$. Po zamknięciu klucza napięcie na równolegle połączonych kondensatorach ma wartość $U_2 = q/(2c) = U/2$. Energia układu kondensatorów wynosi $W_2 = cU^2/4$ i jest mniejsza od początkowej o wielkość $|\Delta W| = cU^2/4$, równą całkowitemu wydzielonemu ciepłu Q. Natężenie prądu płynącego przez oba oporniki podczas przeładowywania kondensatorów jest w każdej chwili jednakowe, zatem ciepło wydzielone na oporze R_1 dane jest wzorem $Q_1 = R_1Q/(R_1 + R_2)$. Ostatecznie $Q_i = \dfrac{R_i cU^2}{4(R_1+R_2)}$, gdzie $i = 1, 2$.

615. Oznaczmy współczynnik samoindukcji uzwojenia pierwotnego w pierwszym przypadku przez L, w drugim przez L'. Współczynnik samoindukcji cewki jest proporcjonalny do przenikalności magnetycznej rdzenia, stąd $L' = L/k$. Uzwojenie możemy traktować jako połączenie szeregowe oporu czynnego R oraz indukcyjnego $L\omega$, gdzie ω jest częstością napięcia zasilającego. Amplituda napięcia na oporze indukcyjnym wynosi $U_L = L\omega U_1/\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}$. Ponieważ zakładamy, że strumienie pola magnetycznego przez uzwojenia pierwotne i wtórne są jednakowe, zachodzi związek $U_2 = nU_L$, stąd $(R/L\omega)^2 = (nU_1/U_2)^2 - 1$. Po zamianie rdzenia amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym dana jest wzorem

$U_2' = \dfrac{nU_1}{\sqrt{1+(\frac{kR}{L\omega})^2}} \approx 100$ V. Widać stąd, że dla normalnej pracy transformatora konieczne jest, aby opór czynny uzwojenia pierwotnego był niewielki w porównaniu z oporem indukcyjnym.