Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 709 ($WT = 1{,}06$) i 710 ($WT = 3{,}44$) z numeru 11/2015

Jerzy Cisło	Wrocław	46,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	41,40
Stanisław Bednarek	Łódź	39,91
Janusz Fiett	Warszawa	38,97
Marek Gałecki	USA	37,76
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	36,17
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	34,72

Jerzy Cisło oto i za czterech Weteranów stanie! Dwanaście okrążeń – to nie jakieś byleco. Życzymy wielu dalszych rund! To nieprzerwane zainteresowanie naszą zabawą – ze strony matematyka tej klasy – cenimy ogromnie.

Zadania z matematyki nr 723, 724

Redaguje Marcin E. KUCZMA

723. Czy każdy ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych ma wyraz, będący jednocześnie pewnym wyrazem ciągu Fibonacciego (F_n)? ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$)

724. Dowieść, że liczby zespolone a, b, c spełniają równanie

$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a| + |b| + |c|$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie

$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a+b+c|.$$

Zadanie 724 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2016

Przypominamy treść zadań:

715. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie A, B. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych może być przedstawiony jako suma rozłącznych zbiorów trójelementowych, przy czym w każdym z tych zbiorów liczba środkowa (co do wielkości) różni się od jednej z dwóch pozostałych liczb o A, zaś od drugiej o B.

716. Dowieść, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2b+ab^2-abc} + \sqrt{b^2c+bc^2-abc} + \sqrt{c^2a+ca^2-abc} > \frac{1}{2}\big(a+b+c\big)\sqrt{a+b+c}.$$

Czy współczynnik $1/2$ (po prawej stronie) może być zastąpiony przez liczbę większą?

715. Można przyjąć, że $A < B$. Wskażemy indukcyjną konstrukcję ciągu zbiorów $X_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ ($x_n < y_n < z_n$) o wymaganych własnościach. Zaczniemy od trójki $x_0 = 0$, $y_0 = A$, $z_0 = A + B$. Załóżmy, że zbiory $X_0, \ldots, X_{n-1}$ zostały już określone. Wówczas definiujemy x_n jako najmniejszą liczbę naturalną jeszcze niewykorzystaną (tzn. nieobecną w zbiorze $X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$) – to już gwarantuje, że w wyniku całej konstrukcji wszystkie liczby naturalne zostaną użyte oraz że ciąg (x_n) będzie rosnący.

Aby dokończyć określenie zbioru X_n (gdy $X_0, \ldots, X_{n-1}$ już mamy), patrzymy na liczbę $x_n + A$. Jeżeli jest ona jeszcze niewykorzystana, przyjmujemy ją jako y_n. Jeżeli jest wykorzystana, bierzemy jako y_n liczbę $x_n + B$; i z konieczności przyjmujemy $z_n = x_n + A + B$ (tak więc jedna z różnic $y_n - x_n$, $z_n - y_n$ będzie równa A, a druga B). Tak określona liczba z_n jest większa od liczb $z_0, \ldots, z_{n-1}$, więc nie została wcześniej wykorzystana.

Pozostaje uzasadnić, że w przypadku, gdy liczba $x_n + A$ została już wykorzystana, wówczas liczba $x_n + B$ pozostała niewykorzystana (i może być użyta jako y_n). Przypuśćmy, że liczba $x_n + B$ znalazła się w którymś zbiorze X_k o numerze $k < n$. Skoro $x_n > x_k$, to $x_n + B > x_k + B \geqslant y_k$; musiałaby zajść równość $x_n + B = z_k$. Ale $z_k = x_k + A + B$, więc mielibyśmy $x_n = x_k + A$. Liczba x_n, niewykorzystana aż do n-tego kroku konstrukcji, tym bardziej nie była jeszcze wykorzystana w momencie konstrukcji zbioru X_k, więc na mocy przyjętego algorytmu powinna była zostać użyta jako y_k.

Uzyskana sprzeczność dowodzi niesłuszności przypuszczenia, że $x_n + B \in X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$, i uzasadnia poprawność określenia y_n; powstały zbiór $X_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ jest rozłączny ze zbiorami $X_0, \ldots, X_{n-1}$.

716. Przyjmijmy $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$; $s = x + y + z = (a + b + c)/2$. Oczywiście x, y, z to długości fragmentów boków od wierzchołków do punktów styczności z okręgiem wpisanym. Oznaczając przez I, r środek i promień okręgu wpisanego, mamy zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa $|AI|^2 = x^2 + r^2$, $|BI|^2 = y^2 + r^2$, $|CI|^2 = z^2 + r^2$.

Lewa strona zadanej nierówności jest sumą trzech składników. Przekształcamy wyrażenie pod pierwiastkiem w pierwszym składniku:

(1) $\quad ab(a+b-c) = (x+z)(y+z)\cdot 2z = 2xyz + 2sz^2.$

Pole trójkąta wyraża się wzorami $S = \sqrt{sxyz}$ (wzór Herona) oraz $S = sr$; stąd $xyz = sr^2$. Kontynuujemy przekształcenie (1):

$$2xyz + 2sz^2 = 2sr^2 + 2sz^2 = 2s\cdot|CI|^2.$$

Analogicznie wyrażają się pozostałe dwa składniki. Dowodzona nierówność przybiera postać

$$\sqrt{2s\cdot|CI|^2} + \sqrt{2s\cdot|AI|^2} + \sqrt{2s\cdot|BI|^2} > \frac{1}{2}\cdot 2s\cdot\sqrt{2s}\,;$$

po uproszczeniu:

(2) $\quad |CI| + |AI| + |BI| > s$

– co jest banalną prawdą, skoro $|CI| > z$, $|AI| > x$, $|BI| > y$.

Biorąc trójkąt, w którym najmniejszy kąt jest bliski zeru, uzyskujemy w nierówności (2) stosunek lewej do prawej strony dowolnie bliski jedności (trójkąt niewiele różni się od odcinka, a obie strony (2) są bliskie długości owego odcinka). Stąd wniosek, że stała $1/2$ (w oryginalnej nierówności) jest optymalna.