Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
707 ($WT = 1{,}64$) i 708 ($WT = 1{,}71$)
z numeru 10/2015

Paweł Najman	Kraków	46,20
Jerzy Cisło	Wrocław	42,48
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	40,34
Stanisław Bednarek	Łódź	38,85
Janusz Fiett	Warszawa	37,91
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	36,17
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77

Pan Najman: 44 p. po raz siódmy.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 721, 722

Redaguje Marcin E. KUCZMA

721. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty D, E, F, w których okręgi dopisane do trójkąta są styczne do tych boków. Niech R i r będą promieniami okręgów opisanego i wpisanego. Dowieść, że stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi $2R/r$.

722. Rozwiązać równanie $2^x + 2^y = 6^z$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Zadanie 722 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2016

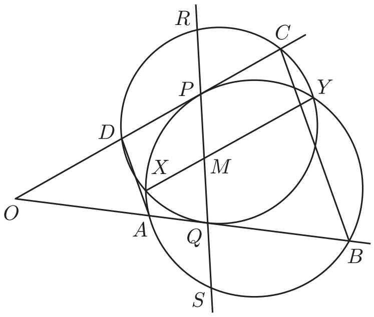
Przypominamy treść zadań:

713. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym boki AB i CD nie są równoległe. Rozważamy okrąg, przechodzący przez punkty A i B, styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrąg, przechodzący przez punkty C i D, styczny do prostej AB w punkcie Q. Zakładamy, że punkty P i Q leżą na odcinkach CD i AB oraz że wspólna cięciwa tych okręgów przechodzi przez środek odcinka PQ. Udowodnić, że proste AD i BC są równoległe.

714. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej $m \geqslant 1$.

(a) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb naturalnych m, n, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$.

(b) Czy istnieje para liczb naturalnych względnie pierwszych $m, n > 1$, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$?



713. Przyjmijmy, że punkt O przecięcia prostych AB i CD leży na półprostych $CD^{\rightarrow}$ i $BA^{\rightarrow}$ oraz że prosta PQ przecina okręgi (ABP) i (CDQ) odpowiednio w punktach S i R (różnych od Q, P). Wspólna cięciwa tych okręgów – nazwijmy ją XY – przechodzi przez środek M odcinka PQ. Z równości $|MP|\cdot|MS| = |MX|\cdot|MY| = |MQ|\cdot|MR|$ oraz $|MP| = |MQ|$ wnosimy, że $|MR| = |MS|$, a stąd $|PR| = |QS|$.

Także $|PC|\cdot|PD| = |PQ|\cdot|PR|$ oraz $|QA|\cdot|QB| = |QP|\cdot|QS|$. Prawe strony tych równości są równe, więc lewe też. Oznaczając odległości punktów A, B, C, D, P, Q od punktu O kolejno literami a, b, c, d, p, q, przepisujemy uzyskaną zależność w postaci $(c-p)(p-d) = (q-a)(b-q)$. Po wymnożeniu i uwzględnieniu równości $p^2 = ab$, $q^2 = cd$, otrzymujemy związek $p(c+d) = q(a+b)$. Tak więc

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a+b}{p} = \frac{c+d}{q} = \sqrt{\frac{c}{d}} + \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Skoro $b > a$, $c > d$, wynika stąd, że $c/d = b/a$. To zaś oznacza, że proste AD i BC są równoległe.

714. (a) Na przykład, każda para postaci $m = p$, $n = 2p$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą, ma wymaganą własność, bowiem $d(p) = 2$, $d(2p) = 4$.

(b) Przypuśćmy, że para liczb względnie pierwszych $m, n > 1$ spełnia podane równanie: $nd(m) = md(n)$. Skoro liczby m, n są względnie pierwsze, wynika stąd, że m jest dzielnikiem liczby $d(m)$. Wobec tego $m \leqslant d(m)$. Taka nierówność zajść może (w formie równości) tylko wtedy, gdy każda liczba ze zbioru $\{1, \ldots, m\}$ jest dzielnikiem liczby m. W szczególności m musi dzielić się przez $m-1$. To zaś ma miejsce jedynie dla $m = 2$ (rozważamy, z założenia, tylko $m > 1$).

Role liczb m, n są symetryczne; to samo rozumowanie pokazuje, że także $n = 2$; sprzeczność z założeniem, że m, n są względnie pierwsze. Nie istnieje więc para, o jakiej mowa w pytaniu (b).