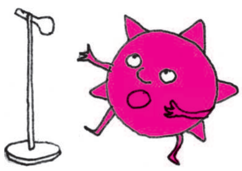
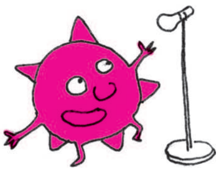
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 705 ($WT = 1{,}87$) i 706 ($WT = 2{,}26$) z numeru 9/2015

Paweł Najman	Kraków	42,85
Jerzy Cisło	Wrocław	39,13
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	38,86
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Janusz Fiett	Warszawa	36,20
Stanisław Bednarek	Łódź	35,50
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77
Paweł Kubit	Kraków	32,98





Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 602 ($WT = 1{,}78$), 603 ($WT = 3{,}28$), 604 ($WT = 1{,}5$) i 605 ($WT = 2{,}2$) z numerów 9–10/2015

Tomasz Wietecha	Tarnów	38,40
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Michał Koźlik	Gliwice	30,96
Marian Łupieżowiec	Gliwice	30,42
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	16,22
Krzysztof Magiera	Łosiów	15,90
Karol Łukanowski	Niemcz	11,97

Zadania z matematyki nr 719, 720

Redaguje Marcin E. KUCZMA

719. Czternaścioro ludzi prezentowało swoje umiejętności w serii występów; w pojedynczym występie mogła uczestniczyć dowolna liczba osób. Było to siedem par małżeńskich – ale małżonkowie nigdy nie wystąpili razem. Za to każda inna para osób (dowolnej płci) uczestniczyła jednocześnie w dokładnie jednym występie. Wiadomo ponadto, że pewna osoba uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Jaka jest minimalna liczba występów, przy której te warunki mogły być spełnione?

720. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą s taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n} \leqslant 2(x^2+s)^n.$$

Zadanie 720 (inspirowane zadaniami 194 i 702) zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2015

Przypominamy treść zadań:

711. Czy istnieje nieskończony ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o wyrazach całkowitych dodatnich, w którym każda dodatnia liczba całkowita występuje jednokrotnie, przy czym dla każdego n suma $x_1 + \ldots + x_n$ jest podzielna przez n?

712. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równania:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0, \qquad b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0.$$

Obliczyć wartość sumy $a + b$.

711. Istnieją takie ciągi. Jedna z możliwych konstrukcji:

Przyjmujemy $x_1 = 1$. Będziemy przedłużać zdefiniowany odcinek ciągu, dołączając po dwa wyrazy.

Ustalmy liczbę parzystą $n \geqslant 2$ i przyjmijmy, że wyrazy $x_1, \ldots, x_{n-1}$ są już określone. Najmniejsza dodatnia liczba całkowita, różna od $x_1, \ldots, x_{n-1}$, będzie wyrazem x_{n+1} (to gwarantuje, że w budowanym ciągu znajdą się wszystkie liczby całkowite dodatnie).

Określamy wyraz x_n wzorem

$$x_n = k_n n(n+1) + n x_{n+1} - (x_1 + \ldots + x_{n-1}),$$

gdzie k_n jest liczbą całkowitą tak dobraną, by uzyskana liczba x_n była dodatnia oraz różna od liczb $x_1, \ldots, x_{n-1}$ i różna od x_{n+1} (powstający ciąg będzie więc miał wszystkie wyrazy różne). Przy tym

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n(k_n n + k_n + x_{n+1}),$$
$$x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = n(k_n n + k_n + x_{n+1}) + x_{n+1} = (n+1)(k_n n + x_{n+1}).$$

Wymagane warunki podzielności są spełnione. Indukcyjnie powstaje ciąg nieskończony (x_n), jakiego szukamy.

712. Zapiszmy liczby a, b jako $a = 1 + x$, $b = 1 + y$. Wówczas

$$a^3 - 3a^2 + 5a = x^3 + 2x + 3, \qquad b^3 - 3b^2 + 5b = y^3 + 2y + 3,$$

a zadane równania przybierają postać

$$x^3 + 2x = 14, \qquad y^3 + 2y = -14.$$

Po dodaniu stronami:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0.$$

Czynnik w drugim nawiasie jest liczbą dodatnią, wobec czego $x + y = 0$. To daje odpowiedź: $a + b = 2$.