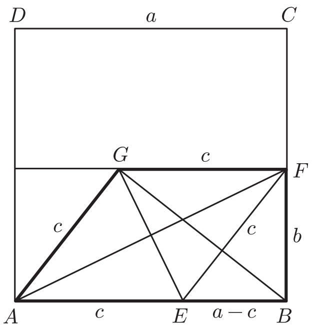
Klub 44

$$\otimes\sqrt{\oint!}=44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2016



Zadania z matematyki nr 717, 718

Redaguje Marcin E. KUCZMA

717. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle BCA| = 2\cdot|\sphericalangle CAB|$. Odcinek CD (o końcu $D\in AB$) jest dwusieczną kąta BCA. Punkt S jest środkiem okręgu, stycznego zewnętrznie do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD oraz stycznego do półprostej $CA^{\rightarrow}$. Udowodnić, że proste AB i CS są prostopadłe.

718. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d zachodzi równość

$$[a,b,c,d] = \frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{(a,b,c,d)}\cdot\frac{(a,b,c)\cdot(a,b,d)\cdot(a,c,d)\cdot(b,c,d)}{(a,b)\cdot(a,c)\cdot(a,d)\cdot(b,c)\cdot(b,d)\cdot(c,d)}.$$

Nawias kwadratowy oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, zaś nawias okrągły – największy wspólny dzielnik liczb ujętych w ów nawias.

Zadanie 718 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2015

Przypominamy treść zadań:

709. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ leżą (odpowiednio) takie punkty E i F, zaś wewnątrz tego kwadratu znajduje się taki punkt G, że $FG\perp BC$, $EF\perp BG$, $EG\perp AF$, $BG\perp AG$. Sporządzony odręcznie rysunek sugeruje, że trapez $ABFG$ pokrywa około 40% powierzchni kwadratu $ABCD$. Czy jest to równość dokładna?

710. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$; wyraz początkowy a_0 jest dowolną liczbą większą od 1. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest asymptotycznie równy ciągowi (b_n) o wyrazach $b_n = n\ln n$; to znaczy, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

709. Nie – ale niewiele brakuje. Oznaczmy: $|AB| = a$, $|BF| = b$, $|AE| = c$. Z podanych warunków wynika, że czworokąt $AEFG$ jest równoległobokiem o przekątnych prostopadłych, czyli rombem. Trójkąty EBF i AGB są podobne. Stąd $|EB| : |EF| = |AG| : |AB|$, czyli $(a-c)/c = c/a$. Z tego równania wyznaczamy $c = a(\sqrt{5}-1)/2$. Z trójkąta prostokątnego EBF dostajemy $b^2 = c^2-(a-c)^2 = a^2(\sqrt{5}-2)$. Pole trapezu $ABFG$ wynosi $b(a+c)/2 = ka^2$, gdzie $k = \sqrt{\sqrt{5}-2}\,(\sqrt{5}+1)/4 \in (0{,}39;\ 0{,}40)$.

710. Będziemy korzystać – podobnie, jak w rozwiązaniach zadań 654 i 662 (*Delta* 5/2013, 9/2013) – z *twierdzenia Stolza*, które mówi, że jeśli (y_n) jest ciągiem *rosnącym* do nieskończoności, wówczas równość

$$\text{(1)}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

zachodzi dla każdego ciągu (x_n), dla którego granica po prawej stronie istnieje. Ponieważ $b_n = n\ln n\to\infty$ rosnąco, twierdzenie ma szanse zadziałać – warto zająć się ciągiem o wyrazach c_n/d_n, gdzie

$$c_n = a_{n+1}-a_n = \ln a_n,$$

$$d_n = b_{n+1}-b_n = \lambda_n + \ln(n+1),\qquad \lambda_n := n\ln\frac{n+1}{n}.$$

Jeśli wykażemy, że $c_n/d_n\to 1$, wzór (1) (dla $x_n = a_n$, $y_n = b_n$) da wynik $a_n/b_n\to 1$ i zakończy rozwiązanie.

Ponownie użyjemy twierdzenia (1) (dla $x_n = c_n$, $y_n = d_n$); ciąg $\lambda_n = \ln\bigl((1+\frac{1}{n})^n\bigr)$ jest rosnący, więc $d_n\to\infty$ rosnąco. Chcemy dowieść, że liczba 1 jest granicą ciągu o wyrazach

$$\text{(2)}\qquad \frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n} = \frac{\ln(a_n+c_n)-\ln a_n}{\bigl(\lambda_{n+1}+\ln(n+2)\bigr)-\bigl(\lambda_n+\ln(n+1)\bigr)} = \frac{\ln\bigl(1+(c_n/a_n)\bigr)}{\bigl(\lambda_{n+1}-\lambda_n\bigr)+\ln\bigl(1+\frac{1}{n+1}\bigr)}.$$

Wszystkie liczby a_n są większe od 1 (oczywista indukcja); ich logarytmy są dodatnie, wobec czego ciąg (a_n) jest rosnący – ma zatem granicę (skończoną lub nie). Granica skończona musiałaby być liczbą $g>1$, spełniającą równanie $g+\ln g = g$, co nie jest możliwe. Tak więc $a_n\to\infty$; co za tym idzie, $c_n/a_n = (\ln a_n)/a_n\to 0$. Korzystając ze znanej relacji granicznej $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, możemy teraz napisać

$$\ln\Bigl(1+\frac{c_n}{a_n}\Bigr) = \gamma_n\cdot\frac{c_n}{a_n},\qquad \ln\Bigl(1+\frac{1}{n+1}\Bigr) = \delta_n\cdot\frac{1}{n+1},$$

gdzie $\gamma_n\to 1$, $\delta_n\to 1$, i przepisać wyrażenie (2) w postaci

$$\text{(3)}\qquad \frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n} = \frac{\gamma_n}{(n+1)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)+\delta_n}\cdot\frac{(n+1)c_n}{a_n}.$$

Z nieco bardziej subtelnej relacji granicznej $\ln(1+t) = t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ (przy $t\to 0$) możemy wywnioskować, że

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n = (n+1)\ln\Bigl(1+\frac{1}{n+1}\Bigr) - n\ln\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr) = = -\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}+o\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr),$$

a stąd $(n+1)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\to 0$. Zatem cały pierwszy czynnik iloczynu po prawej stronie wzoru (3) dąży do 1. Pozostaje dowieść, że drugi czynnik też – czyli że

$$\text{(4)}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n/c_n}{n+1} = 1.$$

Jeszcze raz skorzystamy ze wzoru Stolza (1), tym razem biorąc $x_n = a_n/c_n$, $y_n = n+1$. Granica po lewej stronie (4) będzie równa granicy $\lim(x_{n+1}-x_n)$, jeśli ta ostatnia istnieje. Skoro $c_{n+1} = c_n+\ln(1+(c_n/a_n)) = c_n(1+\gamma_n/a_n)$, zatem

$$x_{n+1}-x_n = \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}-\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n+c_n}{c_n(1+\gamma_n/a_n)}-\frac{a_n}{c_n} = = \frac{1-\gamma_n/c_n}{1+\gamma_n/a_n}\to 1$$

(bo $\gamma_n\to 1$, $a_n\to\infty$, $c_n\to\infty$). To dowodzi słuszności tezy (4), więc i tezy zadania.