Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2016

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2014/15

Paweł Najman	–	6–42,85
Marek Spychała	–	1–42,75
Grzegorz Karpowicz	–	1–38,86
Jędrzej Garnek	–	2–37,64
Krzysztof Maziarz	–	35,37
Jerzy Cisło	–	11–35,00
Janusz Fiett	–	1–34,33
Franciszek S. Sikorski	–	1–33,77
Paweł Kubit	–	5–32,53
Stanisław Bednarek	–	1–31,37
Witold Bednarek	–	6–30,49
Michał Koźlik	–	29,50
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Zbigniew Skalik	–	2–24,82
Adam Dzedzej	–	2–24,55
Piotr Kumor	–	12–24,43
Paweł Duch	–	1–24,10
Roksana Słowik	–	1–23,01
Paweł Burdzy	–	19,87
Tomasz Wietecha	–	10–18,56
Krzysztof Kamiński	–	2–17,66
Marcin Kasperski	–	3–17,53
Janusz Wojtal	–	16,17
Marcin Małogrosz	–	1–16,06

Legenda (przykładowo): stan konta 6–30,49 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 30,49 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2013, 2014 lub 2015.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (12), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (16), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (10), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (11), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Zadania z matematyki nr 715, 716

Redaguje Marcin E. KUCZMA

715. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie A, B. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych może być przedstawiony jako suma rozłącznych zbiorów trójelementowych, przy czym w każdym z tych zbiorów liczba środkowa (co do wielkości) różni się od jednej z dwóch pozostałych liczb o A, zaś od drugiej o B.

716. Dowieść, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2b+ab^2-abc}+\sqrt{b^2c+bc^2-abc}+\sqrt{c^2a+ca^2-abc} > \\ > \frac{1}{2}\big(a+b+c\big)\sqrt{a+b+c}.$$

Czy współczynnik 1/2 (po prawej stronie) może być zastąpiony przez liczbę większą?

Zadanie 716 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2015

Przypominamy treść zadań:

707. Niech $W(x,y,z)=1+9x(x-y)(x-z)$. Znaleźć wszystkie trójki liczb zespolonych a,b,c, dla których spełnione jest równanie $W(a,b,c)=W(b,c,a)=W(c,a,b)=0$.

708. Dane są dodatnie liczby całkowite nieparzyste k, m. Niech $d=\mathrm{nwd}(k+1,\ m-1)$, $e=\mathrm{nwd}(k-1,\ m+1)$, $f=\mathrm{nww}(d,e)$. Dowieść, że liczba k^m+m^k dzieli się przez f.

707. Niech a,b,c będzie jedną z szukanych trójek. Jasne, że to są trzy różne liczby. Tak więc

$$0=\frac{W(a,b,c)-W(b,c,a)}{9(a-b)}=a^2+b^2-(a+b)c.$$

Równoważnie:

$$(a+b+c)c=a^2+b^2+c^2.$$

Cykliczne przesunięcie symboli daje taką samą równość, z wyłączonym poza nawias czynnikiem a lub b. Skoro liczby a, b, c są różne, wynika stąd, że

$$a+b+c=0 \quad \text{oraz} \quad a^2+b^2+c^2=0.$$

Są to więc pierwiastki wielomianu z^3-Az^2+Bz-C o współczynnikach $A=a+b+c=0$, $C=abc$,

$$B=ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=0$$

– czyli wielomianu z^3-C. To znaczy, że $a^3=b^3=c^3=C=abc$.

Równanie $W(a,b,c)=0$ daje teraz ciąg równości

$$(1)\qquad -\frac{1}{9}=a(a-b)(a-c)=a\big(a^2-(-a)a+bc\big)=2a^3+abc=3a^3,$$

i tak samo dla b i c. Tak więc liczby a, b, c to trzy różne pierwiastki trzeciego stopnia z liczby $-1/27$; czyli np.

$$(2)\qquad a=-\frac{1}{3},\quad b=-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\Big),\quad c=-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\Big),$$

z dokładnością do permutacji.

Na odwrót, dla każdej z sześciu trójek, uzyskanych przez permutacje trójki (2), można odwrócić ciąg równości (1), i tym samym sprawdzić, że spełnione jest równanie $W(a,b,c)=0$ (oraz jego cykliczne odpowiedniki).

708. Liczba m^k-1 dzieli się przez $m-1$, więc i przez d. Wobec nieparzystości m, liczba k^m+1 dzieli się przez $k+1$, więc i przez d. Zatem suma tych dwóch liczb, czyli m^k+k^m dzieli się przez d. Z symetrii warunków zadania wynika, że m^k+k^m dzieli się także przez e. W takim razie dzieli się przez liczbę $f=\mathrm{nww}(d,e)$.

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedzej, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, S. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, J. Fiett, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Odszedł **Andrzej Idzik**. To był szok dla wszystkich – tą tragiczną wiadomością rozpoczął się rok 2015. Czytelnicy *Delty* wielokrotnie spotykali jego nazwisko; korespondował z czasopismem nie tylko jako uczestnik ligi zadaniowej. Choć z ligą przede wszystkim. W fizycznej był jedną z czołowych postaci: rozpoczął udział w 1996 roku, jedenastokrotnie zdobył 44p.; dwunastej rundy nie zdołał już ukończyć. Ostatnie prace to były rozwiązania zadań z numeru 12/2014 (!). W lidze matematycznej: start w roku 1999, dwie pełne rundy, ostatnie zadania z numeru 6/2014. Wiele wdzięku miały jego prace; trochę żartobliwej ironii pod adresem własnych nieporadności – jak zwykł je nazywać...

Kartę żałobną musimy kontynuować. **Kazimierz Serbin** nie żyje już od roku 2007, choć wiadomość o tym dotarła do nas niedawno. Był wieloletnim nauczycielem matematyki (w tym licznych olimpijczyków) oraz dyrektorem liceum w Sanoku. W lidze matematycznej został Weteranem (trzy pełne rundy); w roku 1995 przysłał swoje ostatnie prace ligowe.

* * *

Teraz doroczne omówienie wybranych zadań. Za niektórymi kryje się kawałek ciekawej matematyki. (WT to współczynik trudności, LPR to liczba poprawnych rozwiązań.)

Zadanie **683** [Przystające okręgi k_1, k_2, punkty przecięcia: A, B; $X \in k_1$, $Y \in k_2$; A, B oraz środek AB nie leżą na prostej XY; równoległobok $XBYZ \Rightarrow$ okręgi (AXZ), (AYZ) przystają do k_1, k_2] ($WT = 2{,}48$; $LPR = 7$). To ostatnie rozwiązanie z ligi matematycznej, jakie (z pięknym kolorowym rysunkiem) przysłał **Andrzej Idzik**...

Inne dobre rozwiązania (**S. Bednarek**, **J. Cisło**, **P. Duch**, **J. Olszewski**, **J. Garnek**, **J. Fiett**) też nie różniły się wiele od firmowego – dostrzeżenie paru równoległoboków, analiza kątów. W niektórych pracach rozumowanie było bezbłędne w konfiguracji narysowanej przez autora pracy, a w innych wymagało niewielkich modyfikacji (np. zamiast równości dwóch kątów – dopełnianie do kąta półpełnego). W jeszcze jednej pracy całkiem odmienne rozumowanie, działające w wybranej konfiguracji, i niestety załamujące się przy innej.

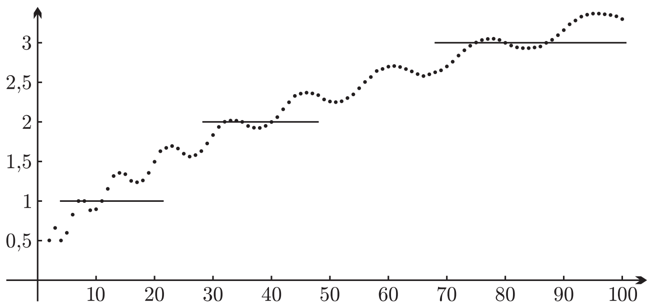
Zadanie **688** [Ostrosłup prawidłowy $SABC$; $|AB| = |BC| = |CA| = 1$; punkty $X \in SA$, $Y \in SB$, $Z \in SC$; $P^2_{SXY} + P^2_{SYZ} + P^2_{SZX} = P^2_{XYZ}$; $V_{SABC} = ?$] ($WT = 2{,}08$; $LPR = 14$). Trzej uczestnicy: **J. Cisło**, **P. Duch**, **J. Olszewski** sięgnęli po najbardziej funkcjonalny oręż, rachunek wektorowy. Można się spierać, czy jest to coś istotnie odmiennego od trygonometrii (użytej w firmówce i w pracach innych uczestników) – ale zapisuje się krótko: oznaczając $\overrightarrow{SX} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{SY} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{SZ} = \mathbf{w}$, mamy $4P^2_{SXY} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2$ (i analogicznie dla ścian SYZ, SZX; podnoszenie wektora do kwadratu w sensie iloczynu skalarnego), i dalej

$$4P^2_{XYZ} = \big((\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} - \mathbf{u})\big)^2 = \\ = \Big(\sum_{\text{cycl}} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\Big)^2 = 4 \sum_{\text{cycl}} P^2_{SXY} + 2W,$$

gdzie $W = \sum_{\text{cycl}} (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. W myśl warunku zadania, zachodzi równość $W = 0$. Wystarczy teraz zastosować znaną tożsamość $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$, by po krótkim przekształceniu sprowadzić wyrażenie W do postaci $W = \sum_{\text{cycl}} \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot (t^2 - t)$, gdzie t jest kosinusem kąta ścian przy wierzchołku S ostrosłupa; $t < 1$. Skoro $W = 0$, wnioskujemy, że $t = 0$, czyli krawędzie SA, SB, SC są parami prostopadłe. Stąd już szybko wynik $V_{SABC} = \frac{1}{24}\sqrt{2}$.

Zadanie **690** [$a_n \in \mathbb{N}$; $a_0 = 1$, $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 1 + (a_1 \ldots a_n)/a_{\lfloor n/2 \rfloor}$; $b_n = 1/(a_{n+1}a_{\lfloor n/2 \rfloor}) \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \in \mathbb{Q}$] ($WT = 2{,}45$; $LPR = 9$). Nietrudne – zrobione przez ośmiu uczestników; wszyscy po prostu obliczyli sumę tego szeregu, równą $1/a_1$ (to liczba wymierna, skoro $a_1 \in \mathbb{N}$). **Stanisław Bednarek** udowodnił, że – nieco ogólniej – jeśli ciągi liczb rzeczywistych dodatnich (a_n), (λ_n) są związane zależnością rekurencyjną $a_{n+1} = 1 + (a_1 \ldots a_n)/\lambda_n$, przy czym $\lambda_n(a_{n+1} - 1) \to \infty$, wówczas szereg $\sum b_n$ o wyrazach $b_n = 1/(\lambda_n a_{n+1})$ ma sumę równą $1/a_1$.

Zadanie **694** [Dla $n \in \mathbb{N}$: $a(n) = \min\{\,|n - k^2|: \ k \in \mathbb{N}\}$; $S(n) = a(1) + \ldots + a(n)$; $f(n) = S(n)/n \Rightarrow$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$: $m = f(n)$ dla dokładnie trzech n] ($WT = 2{,}95$; $LPR = 4(7?)$). **Ł. Garncarek**, **P. Kumor**, **J. Olszewski** (oraz, z luką, **W. Tobiś**) przysłali rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego. Autor zadania, **Przemysław Grabowski**, proponował nieco inny sposób postępowania: eksperymentując, łatwo znaleźć (dla ustalonego m) trzy rozwiązania równania $f(n) = m$, mianowicie $n = 9m^2 - 1$, $n = 9m^2 \pm 2m$. To, że nie ma innych, można uzasadnić, wyznaczając przedziały monotoniczności i lokalne ekstrema funkcji $f(n)$; szkic wykresu poniżej.



Jest to niezbyt trudne, ale kłopotliwe (**J. Cisło**, **J. Fiett** – luki uzupełnialne). Metodę pośrednią wybrał **T. Wietecha** – rozwiązanie pełne, choć rozbite na liczne przypadki; za to praca zawiera, jako załącznik, tabelę wartości $f(n)$ (z dokładnością 10^{-3}), ręcznie wypisaną, dla $n \leqslant 106$. Skwapliwie skorzystaliśmy z tej pomocy, sporządzając wykres :)

Ciekawostka: ciągu $S(n)$ nie udało się znaleźć w OEIS (*The Online Encyclopedia of Integer Sequences*). A ciąg $f(n) = S(n)/n$ ładny, jak widać z obrazka.

Zadanie **696** [Wyznaczyć $\max\{n:\ \exists\, n$ punktów na płaszczyźnie, których każde trzy rozpinają trójkąt równoramienny$\}$] ($WT = 2{,}86$; $LPR = 5$). Ciekawa geometria kombinatoryczna. Rozwiązanie prawie identyczne z firmowym przedstawił **Janusz Fiett**. Bardziej uciążliwie, ale zasadniczo poprawnie (liczne przypadki): **Janusz Olszewski**, **Tomasz Wietecha**. Natomiast dwaj uczestnicy zwrócili uwagę, że zagadnienie jest znane – **Jerzy Cisło** wskazał rozwiązanie: P. Erdős, L. M. Kelly (*Problem* E735, *The American Mathematical Monthly*, vol. 54, no. 4, pp. 227–229, 1947); ten sam odsyłacz dał **Piotr Kumor**, od którego ponadto dowiedzieliśmy się o analogicznym zagadnieniu w przestrzeniach wyższych wymiarów, rozwiązanym w pracach: H. Kido *Classification of isosceles eight-point sets in 3-dimensional Euclidean space* (*European J. of Combinatorics*, vol. 27, no. 3, pp. 329–341, 2006) oraz H. Kido *On Isosceles Sets in the 4-Dimensional Euclidean Space* (Hindawi Publishing Corporation, *Intl. J. of Combinatorics*); `http://www.hindawi.com/journals/ijcom/2010/803210/`

W R^2 (nasze zadanie) szukane maksimum wynosi 6 i jest realizowane przez wierzchołki pięciokąta foremnego i jego środek. Z prac Kido wynika, że w $\mathbb{R}^3$ maksimum wynosi 8, w $\mathbb{R}^4$ zaś 11; realizacja w $\mathbb{R}^3$: bieguny i środek sfery oraz wierzchołki pięciokąta foremnego na równiku (trzeba dopuścić „trójkąt” zdegenerowany do trójki współliniowej).

Zadanie **700** [Czy $\forall\, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (z $g(1) = 1$) $\exists\, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\forall\, m, n \in \mathbb{N}:\ (f(n) \geqslant g(n))\ \&\ (m \perp n \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n))$?] ($WT = 2{,}75$; $LPR = 5$). Konstrukcja funkcji f identyczna, jak w rozwiązaniu firmowym: **S. Bednarek**, **J. Cisło**, **J. Fiett**, **Ł. Garncarek**, **P. Kumor**.

Zadanie **702** [$F_n(t) = t^n + (t+1)^n \Rightarrow$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których równanie $F_{2n}(x) = F_n(y)$ nie ma rozwiązań całkowitych $x, y \geqslant 1$] ($WT = 3{,}44$; $LPR = 2$). To się zaczęło przed ćwierćwieczem. **Marcin Mazur**, wówczas doktorant w Instytucie Matematyki UW, postawił hipotezę, że dla $n \geqslant 2$ równanie $F_{2n}(x) = F_n(y)$ nie ma rozwiązań $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, w których $|x| > 1$ lub $|y| > 1$. Potrafił wykazać, że jeśli (dla ustalonego n) takie rozwiązania istnieją, to jest ich tylko skończenie wiele – i taką tezę zaproponował dla naszej ligi. Zadanie ukazało się z numerem 194 (*Delta* 8/1989; rozwiązanie autora: *Delta* 5/1992). Nawet tak okrojona treść okazała się za trudna dla ówczesnych uczestników. Jako jedyne w historii ligi otrzymało $WT = 4{,}00$. Roczne omówienie tego zadania zaczynało się słowami: *Ten rekord jest już nie do pobicia…*

Eksplorację problemu podjął niedawno **Piotr Kumor**, uzyskując wynik, który zaproponował jako obecne zadanie 702. I on, i redaktor ligi, byli przekonani, że przypomnienie zadania 194 (przy podaniu treści zadania 702) stworzy jedyną szansę, by ktokolwiek je rozwiązał. Dwaj uczestnicy sprostali wyzwaniu. Obaj wykazali, że równanie nie ma rozwiązań, gdy $n > 2$ jest *liczbą pierwszą*. Rozwiązanie firmowe też wskazuje tę samą serię; metoda z rozwiązania zadania 194 jest przydatna (fragment tamtego rozwiązania został skopiowany w „firmówce” 702).

Janusz Olszewski odnalazł ów numer archiwalny i powołał się na szacowanie, użyte w tamtym rozwiązaniu. **Jerzy Cisło** nie odnalazł owego numeru i *zrobił zadanie od zera* (tą samą metodą) – przy okazji zauważając, że tezę zadania 194 także uzyskał. W latach 1986–2000 pan Jerzy w lidze nie brał udziału; widać, że gdyby brał, zadanie 194 miałoby $WT < 4$ (!)

Piotr Kumor kontynuuje badanie tego równania. Znalazł inne nieskończone serie wykładników n, dla których brak rozwiązań. Uzyskał dalsze interesujące wyniki, ukazujące dwoistą (analityczno-algebraiczną / teorio-liczbową) naturę problemu: jeśli $n \geqslant 2$ oraz $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ jest rozwiązaniem, to różnica $r = y - (x^2 + x)$ spełnia nierówność

$$\sqrt{n+1} - 2 < r \leqslant (n-2)/2,$$

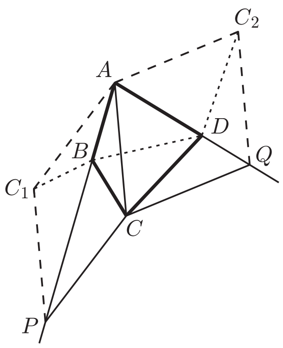
przy czym dla ustalonej wartości r może istnieć co najwyżej jedno rozwiązanie; jeśli ponadto $n \geqslant 3$ jest liczbą nieparzystą, to różnica r dzieli się przez iloczyn wszystkich liczb pierwszych p takich, że $p - 1$ jest dzielnikiem $n - 1$; te wyniki dają znaczące oszacowanie liczby (ewentualnych) rozwiązań. Dalsze wyniki: jeśli iloczyn, wzmiankowany w ostatnim zdaniu, przekracza $(n-3)/4$, to równanie ma nie więcej niż jedno rozwiązanie; a gdy przekracza $(n-3)/2$, rozwiązań nie ma.

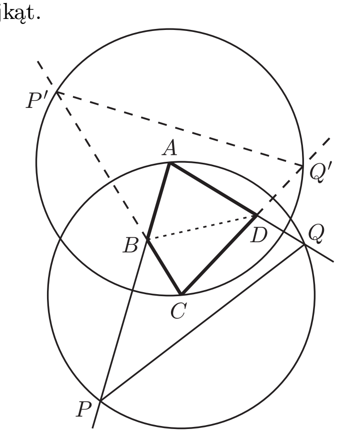
No, ale czy dla jakiegokolwiek $n \geqslant 2$ rozwiązania z $x, y \geqslant 2$ w ogóle istnieją? Problem nadal otwarty…

Zadanie **703** [Czworokąt wypukły $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C < 90^\circ$; $P \in AB^{\to}$, $Q \in AD^{\to}$, $|CP| = |CQ| = |CA| \Rightarrow |PQ| \leqslant \text{obwód}(\triangle ABD)$] ($WT = 3{,}00$; $LPR = 4$).
Ł. Garncarek, **P. Kumor**, **J. Olszewski** – firmowo.
Stanisław Bednarek – inaczej, i bardzo efektownie: budujemy romby $ACPC_1$, $ACQC_2$ (więc $|BC_1| = |BC|$, $|DC_2| = |DC|$); powstał równoległobok C_1PQC_2, a zatem

$$|PQ| = |C_1C_2| \leqslant |C_1B| + |BD| + |DC_2| = \text{obwód}(\triangle CBD).$$

Teza? Nie – bo to nie ten trójkąt.





No to zamieniamy rolami punkty A i C. Na półprostych $CB^{\to}$, $CD^{\to}$ znajdujemy punkty P', Q' tak, by okrąg $(CP'Q')$ miał środek A (podobnie jak okrąg (APQ) miał środek C). Z konkluzji poprzedniej części wnosimy, że $|P'Q'| \leqslant \text{obwód}(\triangle ABD)$. Ale $|P'Q'| = |PQ|$, bo to cięciwy przystających okręgów (APQ), $(CP'Q')$, podpierające równe kąty wpisane PAQ, $P'CQ'$. Teraz to już naprawdę teza – i to wzmocniona: $|PQ|$ nie przekracza obwodów *obu* tych trójkątów (ABD i CBD).

Autor tej ciekawej pracy zwrócił ponadto uwagę, że w treści zadania $AB^{\to}$, $AD^{\to}$ należy rozumieć jako półproste *otwarte*, tj. bez punktu A (gdyby dopuścić możliwość $P = A$ lub $Q = A$, punkt C przestaje być środkiem okręgu (APQ) i teza się załamuje – o przykłady nietrudno).