Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 703 ($WT = 3{,}00$) i 704 ($WT = 1{,}05$) z numeru 6/2015

Paweł Najman	Kraków	42,85
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	38,86
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jerzy Cisło	Wrocław	35,00
Janusz Fiett	Warszawa	34,33
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77

Zadania z matematyki nr 713, 714

Redaguje Marcin E. KUCZMA

713. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym boki AB i CD nie są równoległe. Rozważamy okrąg, przechodzący przez punkty A i B, styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrąg, przechodzący przez punkty C i D, styczny do prostej AB w punkcie Q. Zakładamy, że punkty P i Q leżą na odcinkach CD i AB oraz że wspólna cięciwa tych okręgów przechodzi przez środek odcinka PQ. Udowodnić, że proste AD i BC są równoległe.

714. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej $m \geqslant 1$

(a) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb naturalnych m, n, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$.

(b) Czy istnieje para liczb naturalnych względnie pierwszych $m, n > 1$, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$?

Zadanie 714 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2015

Przypominamy treść zadań:

705. Niech A_0 będzie ustalonym wierzchołkiem $(n{+}1)$-kąta foremnego. Numerujemy pozostałe wierzchołki $A_1, \ldots, A_n$ w dowolnej kolejności. Każdemu bokowi A_iA_j przyporządkowujemy liczbę $|i-j|$. Niech S będzie sumą $n+1$ liczb, przyporządkowanych wszystkim bokom. Dla zadanej liczby naturalnej n:

(a) Obliczyć najmniejszą osiągalną wartość sumy S.

(b) Wyjaśnić, ile jest sposobów ponumerowania n wierzchołków (poza A_0), przy których S osiąga ową minimalną wartość.

706. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 1$, dla których istnieje wielomian W stopnia n, o współczynnikach całkowitych, ze współczynnikiem wiodącym równym 1, i taki, że równanie $W(x)^2 = 1$ ma $2n$ pierwiastków całkowitych (niekoniecznie różnych).

705. (a) Pewien wierzchołek otrzymuje nazwę A_n. Idąc od A_0 do A_n wzdłuż brzegu wielokąta, w wybranym kierunku, mijamy kolejno wierzchołki $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$. Przechodzimy przez A_n, dalej mijamy wierzchołki $A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$, i wracamy do A_0. Numery $i_1, \ldots, i_k$ oraz $j_1, \ldots, j_m$ tworzą permutację zbioru $\{1, \ldots, n{-}1\}$. Liczby, przyporządkowane wszystkim bokom, sumują się do wartości

$$\begin{aligned} S = \big(|0-i_1| + |i_1-i_2| + \ldots + |i_{k-1}-i_k| + |i_k - n|\big) + \\ + \big(|n-j_1| + |j_1-j_2| + \ldots + |j_{m-1}-j_m| + |j_m - 0|\big) \geqslant \\ \geqslant n + n = 2n. \end{aligned}$$

Równość w tym szacowaniu jest osiągalna; ma ona miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $i_1 < \ldots < i_k$ oraz $j_1 > \ldots > j_m$. Zatem $2n$ to szukane minimum.

(b) Zbiór $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ może być dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, \ldots, n{-}1\}$ (również pustym, wtedy pierwszy składnik rozpisanej sumy S ma postać $|0-n|$). Zauważmy teraz, że już sam *wybór* zbioru I determinuje ponumerowanie, realizujące równość $S = 2n$; liczby ze zbioru I, uporządkowane rosnąco, trzeba przypisać kolejnym wierzchołkom (przy obieganiu wielokąta od A_0 w wybranym kierunku), następny wierzchołek trzeba nazwać A_n, a dalszym wierzchołkom dać niewykorzystane numery, uporządkowane malejąco.

Konkluzja: jest tyle możliwości optymalnego ponumerowania n wierzchołków, ile podzbiorów ma zbiór $\{1, \ldots, n{-}1\}$, to znaczy 2^{n-1}.

706. Przykładami wielomianów, o jakich mowa, stopni $n = 1$ oraz $n = 2$, mogą być $W(x) = x$ oraz $W(x) = x^2 + x - 1$. Wykażemy, że nie istnieje wielomian o podanych własnościach, stopnia $n \geqslant 3$.

Przypuśćmy, że W jest takim wielomianem. Zestaw wszystkich $2n$ pierwiastków wielomianu $W(x)^2 - 1$ rozdzielamy na ciąg $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ pierwiastków wielomianu $W(x) - 1$ oraz ciąg $\beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$ pierwiastków wielomianu $W(x) + 1$. Wówczas

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i) = \big(W(x)-1\big) - \big(W(x)+1\big) = -2.$$

Podstawiając $x = \beta_n$ mamy $\prod_{i=1}^{n}(\beta_n - \alpha_i) = -2$, skąd wynika, że najmniejszy z czynników tego iloczynu jest liczbą ujemną: $\beta_n - \alpha_n < 0$. Wobec tego α_n jest liczbą większą od wszystkich β_i. Widzimy ponadto, że liczby α_i nie mogą być wszystkie równe, bo liczba -2 nie jest iloczynem n równych liczb całkowitych. Zatem $\alpha_1 < \alpha_n$.

Podstawiając z kolei w równaniu (1) $x = \alpha_n$ dostajemy $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_n - \beta_i) = 2$. Jest to iloczyn dodatnich liczb całkowitych; największa musi być dwójką, a pozostałe jedynkami – to znaczy,

$$(2) \qquad \beta_1 = \alpha_n - 2; \qquad \beta_i = \alpha_n - 1 \quad \text{dla } i = 2, \ldots, n.$$

Wracamy do równania (1) i podstawiamy $x = \alpha_1$; otrzymujemy równość $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_1 - \beta_i) = 2$. Zgodnie ze wzorami (2), przepisujemy ją w postaci

$$(3) \qquad (\alpha_1 - \alpha_n + 2)(\alpha_1 - \alpha_n + 1)^{n-1} = 2.$$

Skoro $n - 1 \geqslant 2$, czynnik $(\alpha_1 - \alpha_n + 1)$ musi być równy ± 1. Gdyby był równy 1, znaczyłoby to, że $\alpha_1 = \alpha_n$, wbrew wcześniejszemu spostrzeżeniu. Gdyby był równy -1, w pierwszym nawiasie wzoru (3) mielibyśmy 0. Równość (3) doprowadziła do sprzeczności.

Wielomiany o postulowanych własnościach istnieją więc tylko dla $n = 1$ i $n = 2$. (Nietrudno znaleźć ich ogólną postać – zostawiamy to jako ćwiczenie).