Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2015

Zadania z matematyki nr 707, 708

Redaguje Marcin E. KUCZMA

707. Niech $W(x,y,z) = 1 + 9x(x-y)(x-z)$. Znaleźć wszystkie trójki liczb zespolonych a,b,c, dla których spełnione jest równanie $W(a,b,c) = W(b,c,a) = W(c,a,b) = 0$.

708. Dane są dodatnie liczby całkowite nieparzyste k, m. Niech $d = \mathrm{nwd}(k+1,\ m-1)$, $e = \mathrm{nwd}(k-1,\ m+1)$, $f = \mathrm{nww}(d,e)$. Dowieść, że liczba $k^m + m^k$ dzieli się przez f.

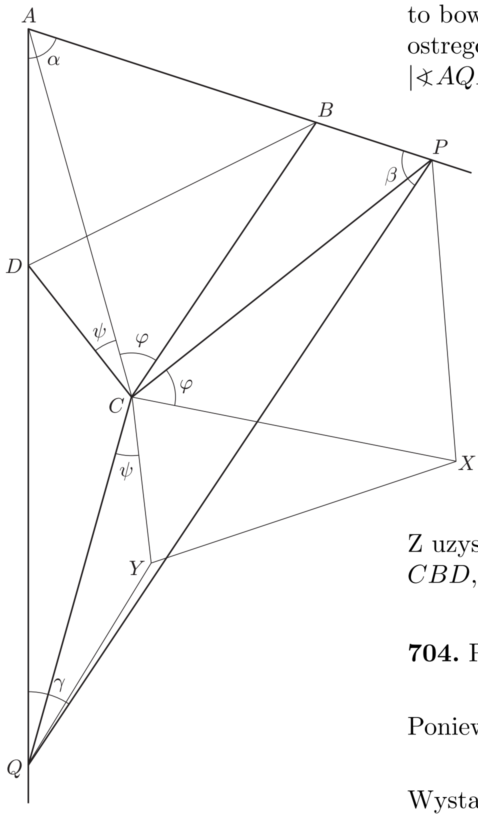
Zadanie 708 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2015

Przypominamy treść zadań:

703. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A oraz C są równe, przy tym ostre. Punkty P, Q, leżące odpowiednio na półprostych $AB^{\to}$, $AD^{\to}$, są wyznaczone przez warunki $|CP| = |CQ| = |CA|$. Wykazać, że długość odcinka PQ nie przekracza obwodu trójkąta ABD.

704. Wyznaczyć największą liczbę A oraz najmniejszą liczbę B, takie że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a,b,c,d spełniona jest nierówność
$$A\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2) \leqslant ab + 2bc + cd \leqslant B\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2).$$



703. Z warunków zadania wynika, że punkt C leży wewnątrz trójkąta APQ (jest to bowiem środek okręgu opisanego na tym trójkącie, leżący w obrębie kąta ostrego PAQ). Oznaczmy kąty tego trójkąta: $|\sphericalangle PAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle APQ| = \beta$, $|\sphericalangle AQP| = \gamma$; ponadto niech $|\sphericalangle ACB| = \varphi$, $|\sphericalangle ACD| = \psi$; z założenia $\alpha = \varphi + \psi$.

Na bokach CP i CQ czworokąta (wklęsłego) $APCQ$ budujemy, po zewnętrznej jego stronie, trójkąty CPX i CQY, przystające odpowiednio do trójkątów CAB i CAD:
$$|PX|=|AB|,\quad |CX|=|CB|,\quad |\sphericalangle PCX|=\varphi,$$
$$|QY|=|AD|,\quad |CY|=|CD|,\quad |\sphericalangle QCY|=\psi$$
(rysunek przedstawia sytuację, gdy punkt B leży między A i P, zaś D między A i Q; ale przy innym uporządkowaniu punktów, na jednej lub drugiej z tych prostych, rozumowanie nie wymaga żadnych zmian). Skoro
$$|\sphericalangle ACX|=|\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle PCX| = 2\gamma+\varphi,$$
$$|\sphericalangle ACY|=|\sphericalangle ACQ| + |\sphericalangle QCY| = 2\beta+\psi,$$
zatem
$$|\sphericalangle XCY| = 360^\circ - 2\beta - 2\gamma - (\varphi+\psi) = 2\alpha - (\varphi+\psi) = \alpha.$$
Z uzyskanych równości wynika, że trójkąt CXY jest przystający do trójkąta CBD, wobec czego $|XY| = |BD|$, i otrzymujemy tezę zadania:
$$|AB| + |BD| + |DA| = |PX| + |XY| + |YQ| \geqslant |PQ|.$$

704. Przyjmijmy oznaczenia: $q = \sqrt{a^2+d^2}$, $r = \sqrt{b^2+c^2}$,
$$S = ab + 2bc + cd,\qquad U = a^2+b^2+c^2+d^2 = q^2+r^2.$$
Ponieważ $|2bc| \leqslant r^2$ oraz $|ab+cd| \leqslant qr$ (nier. Cauchy'ego–Schwarza), zatem
$$|S| \leqslant r^2 + qr = r(q+r).$$
Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $S \neq 0$ (więc $r(q+r) > 0$). Wówczas
$$\frac{U}{|S|} \geqslant \frac{q^2+r^2}{r(q+r)} = \frac{q-r}{r} + \frac{2r}{q+r} = -2 + \frac{q+r}{r} + \frac{2r}{q+r} =$$
$$= -2 + \left(\frac{q+r}{\sqrt{2}\,r} + \frac{\sqrt{2}\,r}{q+r}\right)\sqrt{2} \geqslant -2 + 2\sqrt{2}.$$
Wobec tego
$$\frac{|S|}{U} \leqslant \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$
To znaczy, że postulowana nierówność podwójna $AU \leqslant S \leqslant BU$ zachodzi ze stałymi $A = -(\sqrt{2}+1)/2$, $B = (\sqrt{2}+1)/2$ (dla $S = 0$ oczywiście też).

Biorąc teraz np. $b = c = 1$, $a = d = \sqrt{2}-1$, uzyskujemy równość $S = BU$ (z podaną stałą B); zaś zmieniając znak w a i c, dostajemy równość $S = AU$ (z podaną stałą A). Znalezione stałe są więc optymalne.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 697 ($WT = 1{,}72$) i 698 ($WT = 2{,}03$) z numeru 3/2015

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Łukasz Garncarek	Opole	41,73
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Paweł Najman	Kraków	36,92
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jędrzej Garnek	Poznań	34,89